昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2014年12月1日発行　第52巻12号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

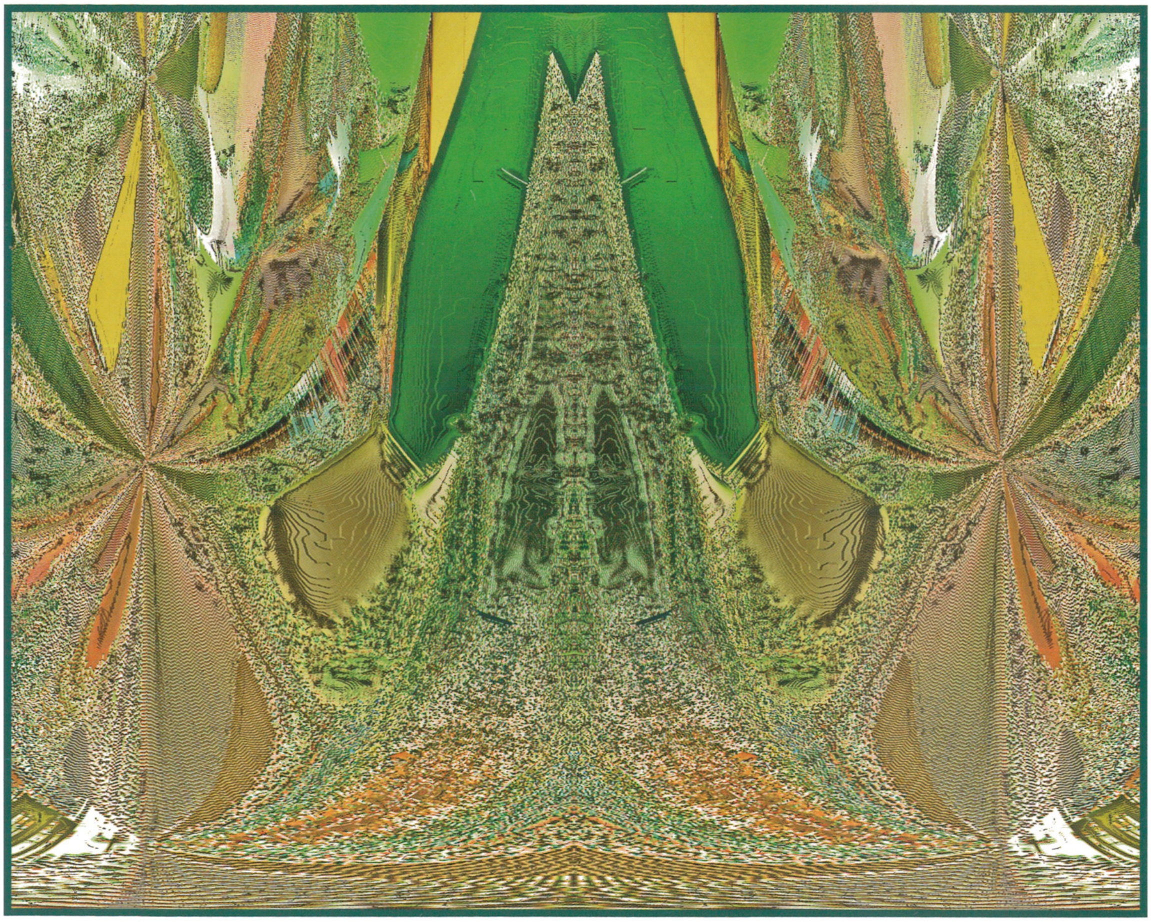
12
2014

特集

場と力の物理イメージ

局所性と非局所性からひもとく物理学の姿

巻頭言	米谷　民明
ニュートンの万有引力の法則	和田　純夫
マクスウェルの電磁気学	岡　真
アインシュタインの特殊相対性理論	小玉　英雄
アインシュタインの一般相対論	窪田　高弘
量子力学に現れる非局所性の意味	木村　元
場の量子論	川村　嘉春
大局的対称性と局所的対称性	谷井　義彰
弦理論における時空非局所性とは何か	米谷　民明
[コラム] 湯川秀樹のマルの理論と素領域概念	田中　正
《フィールズ賞で語る現代数学》第3回	宮本　雅彦
《連載》経路積分と量子解析 その5	鈴木　増雄



No.618

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 618 December 2014

場と力の物理イメージ

局所性と非局所性からひもとく物理学の姿

《特　集》	巻頭言 物理学における局所性と非局所性の相克	5	米谷　民明
	ニュートンの万有引力の法則 遠隔作用的見方	7	和田　純夫
	マクスウェルの電磁気学 近接作用的見方と場の概念	15	岡　真
	アインシュタインの特殊相対性理論 空間的に離れた２点の同時性の問題	22	小玉　英雄
	アインシュタインの一般相対論 場の理論からニュートンの法則へ	29	窪田　高弘
	量子力学に現れる非局所性の意味	36	木村　元
	場の量子論 因果律と局所場	43	川村　嘉春
	大局的対称性と局所的対称性	50	谷井　義彰
	弦理論における時空非局所性とは何か	57	米谷　民明
	[コラム] 湯川秀樹のマルの理論と素領域概念 “非可換量子化時空” 出現の兆しと素領域概念のゆくえ	64	田中　正
《書　評》	北孝文著 統計力学から理解する超伝導理論	66	小形　正男
	土屋麻人著 弦理論と行列模型 弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方	67	杉野　文彦
《「数理科学」は語る》	1984年12月号	68	荻野　綱男
《リレー連載》	フィールズ賞で語る現代数学③ 群と対称	69	宮本　雅彦
《連　載》	経路積分と量子解析⑤ 量子古典対応 (1) 非可換系を可換系で表現する	76	鈴木　増雄

数理科学（11月号）前号案内／84
数理科学（１月号）次号予告／84
数理科学バックナンバー一覧／83

表紙：戸川　隼人

December 2014 MATHEMATICAL SCIENCES Number 618

特集／場と力の物理イメージ

巻頭言

物理学における局所性と非局所性の相克

米谷 民明

歴史を振り返ると,「局所性」と「非局所性」という一見対立的な概念が，その意味は変容しながらも，物理学の背景を紡ぐ縦糸と横糸のような役割を果たしていることに思い当たる．ニュートンの仕事を考えてみよう．ガリレイの没年に生まれた彼は，ガリレイが創始した近代科学の方法を引き継ぎ，運動方程式の定式化により，万有引力の法則の発見に至った．この偉業の基礎にはケプラーの仕事があったが，ケプラーは，天体運動の原因に関して太陽からの光とのアナロジーにより遠隔作用的な力を想像していた．一方，ガリレイは加速度の概念を初めて明確にしたが，加速度を生む原因については，当時流布していた様々な説を意識し,「その原因は何であれ，加速運動のいくつかの本性を研究し説明する」と宣言した（『新科学対話』第3日のサルヴィアチの発言，岩波文庫版）．ニュートンは，まさにこの立場を進めて古典力学の基礎を築くのに成功した．力の原因は棚上げにして，運動と力を結びつける精密な方法を自ら創始し，非局所作用としての重力の「地上」と「天上」で共通の普遍的な法則性を発見し数学的に定式化した．彼は学生時代からデカルトを詳細に研究したようだ．書名『自然哲学の数学的原理』（通称，プリンキピア）は，デカルトの『哲学の原理』を意識したものであろう．デカルトは「空虚」を徹底的に排除したため，空間延長には連続的に物質的実体が伴うとし，力や運動を直接的な接触作用に帰着させる局所性の立場を取った．ニュートンは原子論の立場からこれを痛烈に批判した．だが，絶対時間，絶対空間の考え方で基礎付けられた彼の遠隔作用説も，ライプニッツの批判などに現れているように，当時すぐに受け入れられたわけではない．18世紀から19世紀にかけてのニュートン力学の発展により，デカルト流の自然哲学は顧みられなくなり，非局所作用としての重力が定着した．

しかし，ニュートン自身，実は自分の立場の弱点や，力の原因の問題を意識していたことは，例えば，プリンキピアの結語「最後にすべての大きさを持つ物体に隠れてあまねく浸透している最も精妙なる，ある精霊について触れるべきかも知れない．（中略）だが，これらは僅かな言葉では説明不可能だ．また，精霊がときめきそしてしなやかに作用する法則を正確に把握し論証するのに十分な実験ができるわけでもない」(英語版から筆者訳)や，後に書かれたもう一つの大著『光学』から伺える．精霊（Spirit）の表現は今日の我々には一見奇妙だが，現代の光子や重力子の概念に通ずるところがあり，『光学』で論じられる光の粒子説にもつながる．ニュートン自身，深いところで非局所性と局所性の相克に揺れ動いていたのである．

近代物理学の意味で局所作用が「場」の理論として具体化し復活するのは，19世紀に入って進展した電気磁気力の理解によってである．ファラデーの力線のアイデアと，マックスウェルによる数学的な定式化と整理を経て，電磁場の概念が確立した．それには古典力学の数学的方法が解析力学に

よってさらに精密化，一般化されるという準備期間も必要であった．電磁力（そして光＝電磁波）は，これにより重力とは異なり場の介在による近接作用として理解できたが，光を伝える力学的実体としての媒質（エーテル）の存在を前提としていた．エーテルに対する地球の運動を検出しようとしたマイケルソン–モーリーの実験の否定的結果により，19 世紀終盤，ニュートンの絶対時間空間の概念がついに限界を露呈し，電磁場理論の解釈は混乱に陥ったが，マックスウェルの没年に生まれたアインシュタインの特殊相対性理論により絶対時間を乗り越えた時空概念が確立し，混乱は一応の決着をみた．これはエーテルを捨て去った上で作用の局所性を定式化するのに必要な決定的ステップであった．

当然，次の問題は，新たな時空概念と重力をどう調和させるかだ．アインシュタインが重力場の理論＝一般相対性理論の完成へ向けて取った道は，等価原理と一般共変性に基づき局所慣性系の概念から出発する方向だった．しかし，それによって持ち込まれた新しい理論構造である一般座標変換の下での物理法則の局所的対称性は，時空と重力場の特徴づけとして局所的な計量テンソルや曲率テンソルの性質だけではなく，時空の地平面，エネルギーの非局所性の問題などに現れているように，むしろ，局所的な性質だけでは理解できない「グローバル」な概念の重要性の認識につながる．重力を除いた力の標準理論としての非可換ゲージ場理論の枠組みの基礎になったヤン–ミルズ理論でも似た状況がある．ゲージ不変な観測可能量としての物理量は，例えば，ウィルソンループや，ゲージ場の無限遠の振舞いから初めて定まる非可換保存量などに現れているように，局所的対称性の帰結として，非局所的な性格が濃いものになる．作用の局所性対非局所性という単純な対立を越えて，新たな意味での両概念間の微妙な，いわば双対的，相互依存的な関係が判明してきた．

量子力学により，問題はまた新たな段階に入る．力は局所的に定義される量子場によって記述できるとしても，実は，重ね合わせの原理と確率解釈によって支配される量子力学的な「状態」概念には，必然的な非局所性が潜む．いわゆる AB（アハロノフ–ボーム）効果もそれを反映する 1 例だ．量子力学的「実在」は，EPR（アインシュタイン–ポドルスキー–ローゼン）論文で主張された古典的な局所性に基づく「物理的実在」の立場では理解できない．そもそも，あらゆる散乱現象で現れる多粒子終状態は常に局所的観測量の状態が遠く隔たって相関を持ち重ね合う「もつれ」(entangle) 状態である．時空の地平面近傍における局所性と非局所性の絡み合いが関係してくると，問題は一段と錯綜する．ブラックホールの情報パラドックスの困難も，その源は，一般相対性理論を基礎付けている局所性と量子状態の非局所性との相克にある．さらに，時空そのものの量子的揺らぎ（量子重力）を考慮するなら，異なる時空が状態として重ね合わさることになり，問題設定自体が変容する．

近年，量子重力の定式化に関してしばしば強調される「ホログラフィック原理」は，空間の境界「表面」だけの情報（空間のバルクで定義された局所重力場の立場からは「グローバル」な量）だけで重力を記述しようとする考え方に基づく．一方，量子重力とゲージ力の統一理論として認識された弦理論は，局所性と非局所性のさらに新たな側面を示す．量子力学に従う弦の非局所性から，実は，一般相対論的な重力，そしてゲージ力，それらを特徴づける局所的対称性が，弦の広がりに比べ大きなスケールでは自然な帰結として導出できることが認識され，さらにホログラフィック原理の特別な実現の一つと考えられるゲージ/重力対応という新たなパラダイムを形成しつつある．弦理論は未だ全貌が解明されていない過渡的段階にあり課題も多いが，弦が示唆する非局所的時空描像には，量子力学的状態の非局所性や「実在」性に関しても，別な見方への鍵が隠されているのかも知れない．

ここまで概観した諸側面がすべて本特集で扱われているわけではないが，読者にはこうした俯瞰を視野に入れて以下の各論を味読していただきたい．

（よねや・たみあき，放送大学教養学部）

ニュートンの万有引力の法則

遠隔作用的見方



和田 純夫

1. 自然科学はニュートンから始まった

ニュートンと万有引力の話は，現代人が小学生から学んできた自然観の根幹に流れている．我々は子供の頃まず，ニュートンはリンゴが木から落ちるのを見て万有引力を発見したという話を聞く[1]．そして地球には上も下もなく，すべてのものは地球の中心に引き付けられていると話が続く．それによって，地球が宇宙空間に浮かんでいるのに，我々が地球から「落ちない」という疑問が答えられる．

高校レベルになると話はさらに具体的かつ定量的になる．まず，円運動とは中心方向に落下し続ける加速度運動であるということを学ぶ．そして，**ケプラー**の第二法則（各惑星の軌道の長径の三乗は公転周期の二乗に比例）が，万有引力が**逆二乗則**に従うことを意味すると学ぶ（ただし惑星の軌道が円であると仮定した話だが）．さらに，月の加速度と地球上で落下する物体の加速度が比較され，それもやはり距離の二乗に反比例していることを知る．つまり天体の運動も地上の物体の運動も含め，自然界の現象はすべて同じ法則に従っていることを知り，物理学に基づく自然観が確立する．

私が高校時代に以上のようなことをしっかりと感じられるほどの感受性をもって物理学を学んだと自信をもっては言えないが，このような力学的自然観を，ニュートンによって完成された，確立した考え方として自然に受け入れていたとは思う．信頼できる自然科学はここから始まったという見方が自然にできあがった．

そのこと自体を否定する気持ちもないし否定する必要があるとも思わないが，歴史も現実もさらに詳しく見ると別な側面が見えてくる．万有引力の理論を確立して現代科学の出発点となったとされる書物は『**プリンキピア**』（1687年に初版）だが，それを読んでみると，学校教育では教えられてきたものとは少し違った印象を受ける．次にその話をしよう．

2. ニュートンが「論破」しようとした相手

プリンキピアの話題になるとまず必ず言われることだが，議論のほとんどに微積分が使われていないということに驚かされる．現代の我々は惑星の軌道を，微分方程式の形に書かれた運動方程式を解いて求める．微分積分という数学を創始したのはニュートン自身，そして同時代のライプニッツと言われているから，ニュートン自身も当然，現代の我々と同じようにしたのだと想像するのが自然だが，実際にはそうではない．中高の幾何の勉強でしたように，図形に補助線をたくさん描いて手品のように結果を導いている[2]．その簡単な例は後でも示すが，手近な本でそのことを知りたい方は，3) に挙げた文献を見ていただきたい．

まだ誕生したばかりの微積分を使っても信用されないと思った，あるいは古代ギリシャのユーク

リッド『原論』が最も厳密な科学書と思われていた時代だったという理由もあるだろう．彼自身が微積分を使わずに幾何学的に証明を進めることに長けていたこともあるだろう．しかし本稿の主題になるのはそこではない．プリンキピアを読むと誰でも感じるであろう，もう一つの意外性を取り上げる．

プリンキピアは誰を論破しようとして書かれたのだろうか．プリンキピアが近代科学の出発点であったとするのなら，それが論破すべき相手は，近代科学以前の考え方（およびその支持者たち）だと考えるのが自然だろう．そして近代科学以前の考え方と言えば，（これはヨーロッパでの話なのだから）古代ギリシャから続いてきた**アリストテレス的自然観**，そしてそれに基づくスコラ学が頭に浮かぶ．

しかしニュートンが論破しようとした相手はむしろ，その頃，近代科学というものの確立を目指していた**デカルト**一派だった．ルネ・デカルト（1596–1650）が活躍したのは17世紀前半であり，ニュートン（1643–1727）の時代の直前だが，デカルトの影響を受けた人々がデカルト流の近代科学の確立のために努力を続けていた（イギリスのニュートンたちと対照させる意味で「**大陸派**」と呼ぶこともある）．

では，アリストテレス的自然観と近代科学の違いは何か．またニュートンはデカルト派の何を問題にしたのか．ニュートンは近代科学に反対したのだろうか．

現代から見ると，アリストテレス的自然観と**近代科学的自然観**の最も大きな違いは，現象の原因をどこに求めるかという点にある．前者では，しばしば「目的因」という概念が重視される．例えば物体が落下するのは，物体は地球の中心（天動説によればそれは宇宙の中心）に向かうという本来の目的（あるいはそうなろうとする内在的性質）があるからだとされる．それに対して，落下を，外部からの影響（重力）としたのが近代科学としての物理学であった．物体の中にも精神的なもの，生命的なものを見ようとした旧来の見方に対して，近代科学は自然現象の説明を，外部からの影響による因果関係に求めたのである．

デカルトはこの因果関係の追及を徹底的に推し進めようとした[4]．彼の自然観はしばしば，**機械論的自然観**と言われる．機械論的とは英語で言えば mechanical だから力学的と訳せないこともないが，それでは彼の考え方の本質が見えてこない．彼はまさに宇宙全体の動きを，時計が歯車によって動くようなものとして機械的に説明しようとしたのである．

デカルトの宇宙論はしばしば**渦動説**と呼ばれる．彼は，真空というものを信じていなかった．宇宙空間には何か（エーテルと呼ぶ）が充満していると考えた．それが渦巻き，惑星を押しているのだと考えた．また地上の物体はエーテルの渦に巻き込まれ，下方に引っ張られるのだと考えた．接触するものどうしが互いに力を及ぼし合って動いていくというのが機械の本質的な部分であり，宇宙全体も巨大な一つの機械として動いているというのが，その当時の科学の先頭に立っていたデカルトたちの世界観であった．

このような見方こそ「科学的」であるという主張の裏には，彼らが「非科学的」であるとした主張があった．物体には，離れた物体に影響を及ぼす能動的な力があるとする発想である．呪術によって他の人に影響を及ぼせるという発想と，無生物にも霊が宿っているという考えが結び付き，非生物間にも遠隔的な影響の与え合いがあるとされた．むしろそれが人々の一般的な認識だった．占星術はまさにその代表であり，宇宙のかなたにある天体の配置が地球上の人々の運命に結び付いているという発想になる．

ニュートンの万有引力の法則は，離れている二物体の間には距離の二乗に反比例する引力が働くという法則である．二物体間の空間には何の存在も仮定されていない（**遠隔作用**）．力がいかに伝達されるかについては，何も説明されていない．これが，大陸派の人々がニュートンは非科学的であると攻撃した理由であり，プリンキピアはこの攻撃に対する反論の著でもある．

3. ケプラーの法則の証明

プリンキピアを簡単に紹介しながら[3]，ニュートンがいかに自分の主張を論理付けたのかを説明しよう．プリンキピアは序論とそれに続く3つの編からなる．序論では用語の定義，そして運動の3つの基本法則が説明される．これらは現在はニュートンの運動法則と呼ばれるが，彼は先人の考えた法則だと言っている．先人とは，ガリレオ，デカルトたちを指す[5]．

これに続く第I編は，主として惑星の運動に関係する様々な命題の証明である．第II編は，それ以外の雑多な問題の証明が含まれるが，詳しく見ると，流体中の運動や抵抗力の話など，渦動説に関係しそうな話題が多い．そして第III編は，それらに基づく，実際の太陽系に関する議論である．最後に註釈として後書きが付く．

もう少し詳しく見よう．プリンキピアでは200ほどの命題が証明されているのだが，万有引力の法則から，惑星の軌道が楕円であることを証明するという最も有名な話は，命題11という，第I編の最初の部分にすでに登場する．だが，さらにその前の，(幾つかの補助定理の後の) 命題1と命題2が，本稿にとっては非常に重要である．わかりやすくするために多少書き直すと，次のようになる．

第I編命題1：公転する物体が，ある固定した1点（力の中心という）に引かれて運動している場合，その物体とこの点を結んだ線分が描く面積は時間に比例する．

第I編命題2：物体がある平面内のある曲線上を動き，その平面内のある点に対する面積速度が一定の場合は，その物体はその点を向く力（向心力）によって動いている．

この命題の証明はプリンキピアの中では最も簡単な部類に属するので，しばしば文献でも紹介されているが，ここでも簡単に紹介しておこう．まず図1を見ていただきたい．物体は $A \to B \to C \to \cdots$ と動く．そして命題1では，力は断続的にS方向に働くとする．例えばBでS方向に力が働いたとすると，物体は慣性によってc方向に動き，また力の影響でBV方向 = cC方向（$BV \parallel cC$）にも動くので，結果としてBC方向に動く．面積速度は最初は△SAB，次は△SBCの面積になり，どちらも△SBcに等しいので面積速度は進行方向が曲がっても変わらないことがわかる．

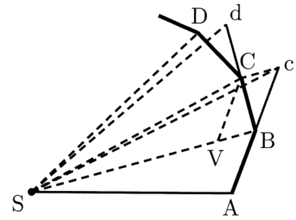


図1 BでBVという力を受けcからCにずれる ($BV \parallel cC$).

命題2では逆に，△SBC = △SBc（面積速度が等しい）であることからBVとcCが平行であることが導かれ，力の方向BVがS方向であることが結論付けられる．

つまり面積速度一定ということと，力の方向が常に，ある定点を向いているということが同等であることが示された．

この命題が重要なのはもちろん，その当時すでに有名だったケプラーの第二法則があるからである．蛇足かもしれないが，ここでケプラーの三法則を確認しておこう．

ケプラーの第一法則：惑星の軌道は，太陽の位置を1つの焦点とする楕円である．

ケプラーの第二法則：惑星と太陽を結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である（面積速度一定の法則）．

ケプラーの第三法則：惑星の公転周期の二乗と，軌道の長半径の三乗の比率は惑星に依存しない一定値である．

したがって，第二法則と，上記命題2を組み合わせれば，惑星の軌道を決めている力は常に太陽の方向を向いているということがわかる．それが太陽が及ぼす力であるとまでは証明できないし，太

陽による力だとしても，それがどのような形で伝達しているのかもわからないが，何らかの意味で太陽に深く関わった力であることは間違いない．

また命題 4 とその系では，軌道が円運動である場合の問題を扱う．円運動の加速度を求める式を導いた後，「周期が半径の n 乗に比例するときは，向心力は半径の $(2n-1)$ 乗に反比例する」という定理を証明する．ケプラーの第三法則に相当するのは $n=3/2$ の場合である．向心力は半径の二乗に反比例するということになって，万有引力の逆二乗則を強く示唆する結果となっている．

その後，物体の軌道から向心力の方向あるいは大きさを求めるための方法が幾つか証明され，命題 10 では，力が力の中心からの距離に「比例」する場合に軌道は楕円になり，周期は半径に依存しないという定理が証明される（バネの力のような場合である）．向心力を受けた物体が決まった軌道の上を動くのは，力が距離に「比例する」場合と「その二乗に反比例する」場合に限られることも，後で証明される．そうでない場合は周回ごとに軌道は変わる．

そして次の命題 11 がプリンキピアの最初のクライマックスである．

第 I 編命題 11：物体（惑星）の軌道が楕円であり，向心力の中心が楕円の焦点である場合，向心力は距離の二乗に反比例する．

命題 12 と命題 13 では双曲線と放物線の場合も同様であることが示され，第 I 編命題 13 系 1 では，距離の二乗に反比例する向心力を受けて動く物体の軌道は，円錐曲線のいずれか（楕円，放物線または双曲線）になることが証明される．そしてさらに，

第 I 編命題 15：ある点を共通の力の中心とする，距離の二乗に反比例する共通の向心力により楕円運動をしている物体（惑星）がいくつかあったとすると，各楕円運動の周期はその長半径の 3/2 乗に比例する．

これは，すでに円運動の場合に証明されていたケプラーの第三法則が，現実の楕円運動の場合にも成り立つということの証明である．そして以上により，惑星が距離の二乗に反比例する力を太陽から受けていると仮定すれば，ケプラーの三法則が満たされることが証明された．

4. 近日点移動

このことが当時の人々に強い衝撃を与えたようだが，ニュートン自身は多少，ニュアンスの異なる主張をしている．それを説明するために，ここで第 III 編にとぼう．第 III 編は「世界の体系」という標題で，それまでに証明した諸命題に基づき現実の太陽系についてニュートンが主張することをまとめたものである．

まず第 III 編命題 1 では，当時すでに発見されていた 4 個の木星の衛星，5 個の土星の衛星が，ケプラーの第二法則と第三法則を満たしていることを指摘し，それぞれの親惑星から距離の二乗に反比例する力を受けていると想像されると主張する（ただし軌道は近似的に円軌道とみなして議論している）．次に，太陽と惑星の間にも逆二乗則を満たす力が働いていると主張するのだが，そこではケプラーの法則は持ち出さない．

そこに登場するのは近日点（近地点）移動という現象である．ケプラーの法則によれば惑星の軌道は楕円だが，どこまで厳密に楕円なのだろうか．例えば月の場合，もし地球の万有引力によって公転しているのなら，地球を焦点とする（厳密には地球と月の重心を焦点とする）楕円になるはずだが，実際にはそうではない．月が地球に最も近づく点（近地点）の方向は，月が一周するごとに 3° ほど変わっている．これを月の近地点移動という．その当時ははっきりしたデータはなかったようだが惑星の場合も太陽に最も近づく位置（近日点）の方向は一周ごとにわずかに変わっている（近日点移動）．確かに軌道が厳密に楕円であり，力が一つの向心力のみであるならば，それが逆二乗則に従うことは証明される．しかしわかっていることは，惑星の軌道は「ほぼ楕円」ということだけである．

月の場合は明らかに楕円からはずれている．では，力の法則が逆二乗則からずれると，軌道は楕円からどれだけずれるだろうか．

この疑問に答えるために必要な議論が第I編命題45からかなり長く続く．すでに言及したが，向心力を受けた物体が同じ軌道を回り続けるのは，力が距離の二乗に反比例するか，距離に比例するかの2ケースに限定される．他の場合は，周回するごとに軌道自体が回り，近日点移動が起こる．つまり近日点移動の大きさ（あるいは有無）と，逆二乗則の是非との間には密接な関係がある．

逆二乗則が正しくても，向心力以外にも力が働いていればやはり近日点移動が起こる．例えば月について言えば，地球の他に太陽からも力を受けているだろう．そこでニュートンは，逆二乗則が破れている場合に起こるはずの近地点移動と，他の力を受けている場合に起こるはずの近地点移動の大きさを計算する式を求める．そして，月の一周 3° という近地点移動を逆二乗則のずれによって説明するには，力は距離の 2.016 乗に反比例するという，不自然な結果になることを示す．一方，太陽の力が原因だと考えれば 3° 程度の近地点移動が説明できると結論付ける．さらに，惑星では近日点移動がほとんど見られていないということから，逆二乗則の正しさが推測されると主張する．つまり軌道がほぼ楕円であるということよりも，近日点がほとんど動いていないということのほうが重要だということである．現実に起きているわずかな近日点移動が，他の惑星が及ぼす力によるものだということが計算によりはっきり示されたのは100年ほどのちのことである．

第III編ではさらに，地表の物体に働く重力の大きさと，地球が月に及ぼしている力の大きさを比較することによって，その力が地球の中心からの距離の二乗に反比例していることを示す．いわゆる「月のテスト」であり，自然界全体の法則，つまり地上と天上での法則が同一であるという，ガリレオたちが強調した近代科学の基本理念が打ち立てられる．

さらにニュートンは，渦動説に対する批判も試

みる．渦動説によってケプラーの第二法則を説明しようとすれば，太陽の周りを回る渦の周期は太陽からの距離の二乗に比例していなければならないが，第三法則を説明しようとすれば，渦の周期は距離の 3/2 乗に比例してなければならない．彗星の運動を説明することもできないと論じる．

5. 万有引力の原因は？

以上のように，逆二乗則を仮定すれば様々な現象が説明でき，渦動説ではできないことが示された．逆二乗則は明らかに，渦動説に比べて説明能力の点ではるかに優れている．しかしだからといってなぜ逆二乗則が成り立つのか，そもそも万有引力という，触ってもいない物体に作用する力という考え方がなぜ成り立つのかという疑問には何も答を出していない．ニュートンもそれについては悩んだようだが，結局は次のように述べている（以下の引用はプリンキピアの〈後書き〉より）．

「我々は天空や海の現象を重力によって説明してきたが，この力の原因までをまだ指定していない．…この力は太陽や惑星の内部まで減ることなく貫入するものであり，天体の表面にだけ作用するようなものではない．…しかし私は重力のこれらの性質の原因を発見することはできなかった．そして私は仮説を作らない．…仮説は実験哲学において何らかの位置を占めるものではない．…重力が発見され，それを一般化して天体や海の現象の説明に役立ったのだから，（その原因について仮説を作らなくても）十分である．」

さらに次のようにも述べている．

「重力が遠方まで伝わるのは，力を媒介する物質が存在するからではなく，神がいかなるときもいかなる場所にも存在するからである．しかし我々は決して神の実体について知ることはできない．ただ神が，重力は距離の二乗に反比例して作用するように，世界を支配し統率していることを知れば，我々にとってはそれで十分である」．

論争は続いたが，科学史としての常識によれば，決着は次のようにしてついたそうである．ニュートンはプリンキピアの中で，地球は完全な球ではなく扁平になると主張した（第 III 編の後半）．自転による遠心力と重力のバランスが取れるためには，地球は扁平にならなければならない．一方，渦動説によれば地球は渦により横方向から押されて動いている．横から押されるのだから，地球はその方向につぶれるだろう．つまり縦長になる．

18 世紀初頭，フランスの科学アカデミーが北極に測量隊を派遣して，緯度 1° がどれだけの長さに相当するかを測定した．それを赤道上での長さと比較して，地球が扁平であることを確かめた．そしてその後，ニュートンは，フランス人がわざわざ北極に行って確かめたことを，書斎ですでに導いていた男として讃えられるようになる．

このようにして万有引力の理論はイギリスでも大陸でも信用されるようになり，力の起因は問われなくなった．もちろん，神云々というニュートンの発言も忘れられた．万有引力の法則は，その原因について追及されることなく，正しい法則として受け入れられるようになったのである．

6. 実証主義的科学

ここまでは，高校あるいは大学前期で学ぶ力学の話である．これは物理学の一つの成功話として聞かされるだろう．確かに，万有引力は太陽系の振舞いを見事に説明した．微小な近日点移動までも正確に計算できるようにもなった．この理論が人類の叡知の成果であることには間違いない．しかしこれは数学の勝利である．万有引力の法則から出発して様々な計算をすればこれだけの結果が出るという話である．そもそも万有引力とは何なのか，それはどのようにして働いているのかといった物理的実体については何もわかっていない．すべてのことを根本原因から説明しようとした近代科学の創始者たちは，これは物理学の敗北であると受け取ったかもしれない．

このことは 18 世紀，そして 19 世紀における科

学に対する考え方に重大な影響を与えた．19世紀には，ニュートン力学は科学の理想形だとされていた．科学とは観測された現象を，何らかの法則に基づき系統づけ，説明するものであり，仮説をもてあそぶものではないとされた．実証主義である．

実証主義的態度がおかしな方向に向いた例が，19世紀末のエネルゲティーク（エネルギー論者）だろう．マッハなどの高名な物理学者が，原子とは観測されない想像上の概念だとして原子論を批判した．そしてエネルギーという概念を基本において物理学を再構築しようとした．しかしそれは失敗に終わった．この場合は，現象の裏にある実体を追求することに意味があったことになる．

万有引力について言えば，その裏にある実体が明らかになったのは20世紀になってから登場した一般相対論によってである．しかし相対論の登場はまさに実証主義的な面があるので，簡単に触れておこう[6]．

1905年にアインシュタインが特殊相対論を提唱したとき，彼の態度は完全に実証主義的だった．まず，光速度不変という現実があった．そこで彼は，互いに等速で動いている観測者が光の信号をやり取りするとき何が起こるかという思考実験を考え，ローレンツ変換を導いた．実際に実験をしたわけではないが，起こり得る現象を指導原理として結論を導いたのである．

その後，ローレンツ変換の背後には時空という実体的概念があることを示したのが，アインシュタインの数学の先生でもあったミンコフスキーである．アインシュタインは最初はそのアプローチを無意味だと否定的に評価したそうだが，ほどなくその意義を認めるようになった．そして彼は，ミンコフスキー時空（平らな時空）を拡張して曲がった時空を考え，一般相対論を構築した（1915年）．一般相対論において初めて，万有引力とは重力場という実体に起因する現象であることが明らかになった．光速度不変性（現象の発見），ローレンツ変換（実証主義的理論）そしてミンコフスキー時空（実体的説明）という理論の発展は十数年で成し遂げられたが，同じ意味での三段階の発展であるケプラーの法則，万有引力の理論，そして一般相対論という発展は300年近くを要したことになる．その視点から見ると，古典力学を科学の理想形とみた19世紀の科学観は，大きな間違いであったと言ってもいいだろう．

特殊相対論の1905年の論文のこともあって，アインシュタインは実証主義者であると誤解している人もいるようである．有名なハイゼンベルクとアインシュタインの会話（1926年）がある[7]．新しくできた量子力学という理論では，電子の軌道という概念がなくなり観測量だけが扱われていることに疑問をもったアインシュタインの質問に対して，ハイゼンベルクは，「絶対時間というものを否定して各観測者にとっての時間を前面に打ち出した特殊相対論と同じ哲学ではないか」と反論した．それに対してアインシュタインは，

「確かに私はそうしたかもしれない．しかしそれは間違いだ．実際はその逆なのだ．…理論のほうが何が観測されるのかを決めているのだ．…原子の中で何かが起きる．そして光が放出され写真板にあたる．それを我々が観測し，と続いていく．…新しい理論でもその一連の現象がうまく説明されなければならない．理論を変えるのならば観測のほうも変えなければならない．」

と答えた．そしてハイゼンベルクはこれに同意した，マッハのように原子の存在を否定してしまうのは間違いだと述べている．先日，「理論は観測量に基づき作られる」というハイゼンベルクの前半の主張をアインシュタインの発言であるかのように紹介していた方がおられたが，事実は全く逆である．

といっても，20世紀の科学全体が実証主義を克服して実在主義的なものになったかと言えば，決してそうではない．現在の物理学の基本理論とされる量子論に関して，その解釈論争はまだ決着がついてはいないが，まだ根強く残っているコペンハーゲン解釈では，波の収縮という，実体の振舞いではなく観測のほうを主体とした概念が一つの柱になっている．ボーアは電子の振舞いについて語

ることまでを否定しようとする．それに対して実在主義的な有力な解釈が多世界解釈なのだが，私に与えられたテーマからはずれてしまうので，この当たりで筆を置くことにしよう[8]．

注と参考文献

1) リンゴの話はニュートン自身が書いた文章にはどこにも出てこない．しかし生前に本人と交流があった複数の人がニュートンの発言として記録に残している．

2) ニュートンによる幾何学的議論は，ライプニッツをはじめ大陸の人々によってすぐに微分積分の形式に書き換えられた．その結果として，力学の発展はその後，イギリスではなくドイツやフランスを中心として進むことになる．

3) プリンキピアを読みたい人には，Andrew Mott 訳 “The Principia” (Prometheus Books, 1995)，中野猿人訳『プリンシピア』(講談社，1977) などがある．解説書としてはこの中野本の他に，チャンドラセカール著，中村誠太郎訳『プリンキピア講義』(講談社，1998)，それをさらにやさしくしたものとして拙書『プリンキピアを読む』(ブルーバックス，2009)．本稿は，私がこの本を書いたときに知った知識に基づいている．

4) ルネ・デカルト，『哲学原理』(1644) (日本語訳：桂寿一訳 (岩波文庫，1964)，山田弘明，吉田健太郎，久保田進一，岩佐宣明共訳 (ちくま学芸文庫，2009))．

5) 運動の三法則をニュートンの法則と呼ぶのは現代になってからのことらしい．少なくとも 19 世紀までは，プリンキピアは古典力学一般ではなく万有引力の法則を説いた本だとみなされていた (山本義隆著『古典力学の形成』(日本評論社，1997))．

6) このあたりのことは読者が相対論の基礎知識をもっていることを前提として話をするが，例えば拙書『グラフィック講義 相対論の基礎』(サイエンス社，2012) を参考にしていただきたい．

7) 何回か訳されているようだが，例えば，青木薫訳『物理学に生きて』(ちくま学芸文庫，2008)，あるいは，アブダス・サラム著，和田純夫訳『究極の宇宙法則』(岩波書店，1991)．

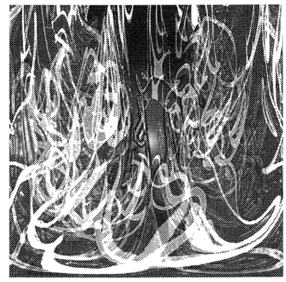
8) 量子論について一つだけコメントをしておこう．アインシュタインは，量子力学が正しいとすると奇妙な (遠隔) 作用 (spooky action) が存在することになるとして量子力学を批判した．EPR パラドックスと呼ばれている話である．しかしこれはエンタングルメントと呼ばれる量子力学特有の性質によるものであり，遠隔作用の存在は意味しないことがわかっている．EPR パラドックスの検証の歴史については，ウィテイカー著，和田純夫訳『アインシュタインのパラドックス』(岩波書店，2014) を参照．

(わだ・すみお，東京大学大学院総合文化研究科)

特集／場と力の物理イメージ

マクスウェルの電磁気学

近接作用的見方と場の概念



岡　真

■　1. はじめに　■

電磁波は現代の我々にとっては大変身近でありかつ不可欠な存在である．可視光はもちろんのこと，身の周りには，ラジオ・TV などを伝える電波，マイクロ波，赤外線，紫外線，X 線など，様々な波長の電磁波が使われている．いまや，光が電磁波であり，それが太陽や遠くの星から宇宙空間を通ってやってくることは周知である．この波はどのようにして真空の宇宙空間を伝わってくるのだろうか．

通常，波といえば，水の表面の波や音波のように物質（媒質，つまり水や空気）が振動して，その振動が有限の速さで媒質中を伝わってくる現象である．音波の速さ（空気中では秒速約 340 m）は，遠くの花火や雷の音が光より遅れてやってくることから実感することができる．しかし，光も瞬間的に伝わるわけではなく，秒速は約 300,000 km である[*1]．地上では瞬時に伝わると感じられても，宇宙のスケールで見ると，アンドロメダ銀河から地球へ到達するのには 250 万年，太陽の光ですら地上に届くのには約 500 秒かかる．そして，アインシュタインの相対論によれば，その光速より速く伝わる波や物質はないとされている．

光が波として伝播する仕組みが，電荷に働くクーロン力や，電流が磁針に与える磁力などの電磁気現象と関連していて，電磁波の一種であることを明らかにしたのが，マクスウェルによる電磁気学の理論であった．マクスウェルの理論によれば，電荷や電流はその周りに電場や磁場を作り出す．その電場や磁場は空間的に広がって，離れたところにある電荷や磁石に力を及ぼす．さらに，振動する電荷や電流の周りに振動する電場と磁場が発生すると，それが遠方に電磁波として伝わっていく．

*1）光速は現在長さの基本単位として使われるため，299792458 m/s と定義されている．

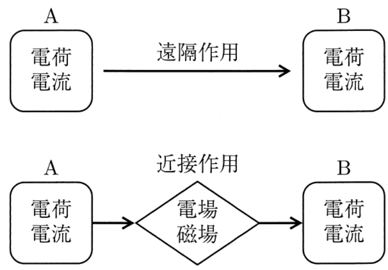


図 1　2 点 A–B 間の遠隔作用と近接作用の概念図．

マクスウェルの理論のように「離れた 2 点 A と B の間に働く力は，その周りの空間を満たす場によって媒介されている」とする考え方を**近接作用**の見方と言う．一方，場を介さずに離れた相手と直接力を及ぼし合うと考えると，この力は**遠隔作用**である．その場合には，力を媒介するために場を導入する必要がないことになる（図 1）．

現代物理学では，すべての物理的な力にはそれを媒介する場が存在して，近接作用（局所相互作用）として記述できると考えられている．特に，素粒子の標準理論は，電磁場の理論を手本として作られた**ゲージ場の理論**をその基本原理としている．この稿では，マクスウェルの電磁気学がどのように近接作用の考え方を実現したかを考察する．

■　2. マクスウェルの電磁場理論の基本原理　■

2.1 マクスウェル方程式[1)]

マクスウェル方程式は，空間座標と時間の関数であ

るベクトル場，**電場** $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ と**磁場** $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$*2) に対する 4 本の微分式からなる．

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{4}$$

ここで，$\nabla\equiv(\partial/\partial x,\partial/\partial y,\partial/\partial z)$．このうち (1) 式と (2) 式は，**電磁場ポテンシャル** $\Phi(\boldsymbol{r},t)$ および $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ を用いて

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{6}$$

と表すことにより，自動的に満たされる．(4) 式の両辺の発散を計算すると，電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ と電流密度 $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$ が，電荷の保存を表す**連続方程式**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0 \tag{7}$$

を満たさなければならないことが分かる．

Φ と $\boldsymbol{A}$ を用いて (3) 式と (4) 式は，

$$-\triangle\Phi-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})=\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\triangle\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) \tag{9}$$

と書ける．ここで，$\triangle=\nabla\cdot\nabla$, $c^2=1/\epsilon_0\mu_0$．

電場と磁場が与えられたときに，電磁場ポテンシャルを求める問題の解は一意ではない．なぜなら，任意の（微分可能な）関数 $\chi(\boldsymbol{r},t)$ を用いた**ゲージ変換**

$$\Phi\to\Phi-\frac{\partial\chi}{\partial t},\quad \boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}+\nabla\chi \tag{10}$$

をポテンシャルに作用しても，対応する電場と磁場は変化しない．この自由度を用いて，電磁場ポテンシャルにさらなる条件を課すことができる．

電磁場ポテンシャルのゲージ変換の自由度に由来する補助条件として，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$（横波条件，**クーロンゲージ**条件）を課すと，

$$-\triangle\Phi=\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{11}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\triangle\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j}-\frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{12}$$

を与える．ここで，(11) 式は時間にあらわに依存しないので，電荷密度分布 $\rho(\boldsymbol{r},t)$ が与えられると

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\boldsymbol{r}' \tag{13}$$

と解ける．(13) 式を (12) 式の右辺に代入すると，$\boldsymbol{A}$ が満たす波動方程式が得られる．右辺は電流と電荷の時間変化で与えられる電磁波の源となる*3)．

2.2 電荷に働く力と場

電荷 q を持ち，速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する粒子は電場，磁場中で**ローレンツ力**

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{14}$$

を受ける．

例えば，電荷密度が時間 t に依存しない（静的な）場合，(13) 式と (14) 式の第 1 項とを組み合わせて，電荷の間に働くクーロン力が得られる．実際に，点電荷 q_1 の電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r}')=q_1\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}_1)$ とおくと，q_1 によって生じる電場は

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}.$$

次に電荷 q_2 を置くと，(14) 式から q_2 に働くクーロン力が得られる．

$$\boldsymbol{F}_2=q_2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_2)=\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1|^3}.$$

このように，電荷がその周りの空間に連続的に電場を作り，その電場が他の電荷に及んで力を与えるとする近接作用の概念が，マクスウェルの電磁気学の基本的な考え方である．

2.3 電磁場の直感的なイメージ

電磁波が伝わる媒質は真空そのものである．なぜなら，もし真空を満たす（未知の）媒質があって，電磁場がその媒質の振動が伝わる波であると仮定すると，測定する電磁波の速度は媒質に対する運動に依存して変化するはずである．しかし，マイケルソン・モーリーの実験[2]によれば，媒質に対する地球の運動による光の速度の変化は認められず，光の速さは媒質に対する運動にはよらず一定であると結論された．媒質の存在そのものが否定されたのである．

電荷の周りの場のイメージとして，しばしば電気力線による電場の分布図が描かれる．ファラデーは電気

*2) $\boldsymbol{B}$ は正式には**磁束密度**場と呼ぶべきであるが，ここでは場であることを強調して，簡潔に磁場としておく．

*3) (12) 式の発散と，連続方程式 (7) 式を用いると，$\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ が斉次波動方程式を満たすことがわかる．したがって，時間によらずに $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ とすることができる．

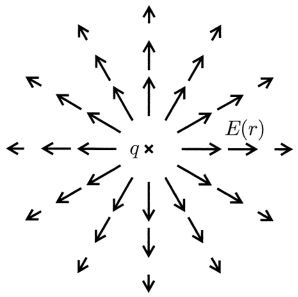


図 2　点電荷 q の周りの電場は，空間の各点のベクトルとして与えられる．

力線とその束である電束を実際に実在するものとして考えていたようである．しかし，マクスウェル方程式（や現代物理学における場の理論）に現れる場は，そのような実体を伴ってはいない．電場や磁場はベクトル場なので，空間の各点に矢印を描くが，それらが 1 本の線に繋がったり，束になったりしているわけではない（図 2）．むしろ，やや抽象的な表現になるが，格子状に区切られた空間を考えて，各格子点にベクトルで表される場があってそれぞれ振動する．その振動が隣の格子点の場へと伝わっていくと考えれば良い．

後で見るように，電磁場の場合には，ポテンシャル Φ と $\boldsymbol{A}$ が基本の場として，空間の各点に配位される．現代物理学では，空間の各点には様々な場が存在し，それらが互いに振動を及ぼし合っている．

3. 遠隔作用と近接作用

3.1 静電気

2 個の電荷の間に働くクーロン力だけを見ると，万有引力と同様に遠隔作用の形をしている．電場や磁場など電荷の周りの空間を充満する場を導入しないで，遠隔作用だけで電磁気学を構成できないのだろうか．

実は，時間に依存しない電荷と電場を扱う静電気学は，クーロン力とその重ね合わせの原理だけを用いて定式化することが可能である．すなわち，物理的実体としての電場がなくても，電荷に働く力や電荷分布，さらには電気的エネルギーなどがすべて記述可能である．

例として，静電エネルギーについて見てみよう．マクスウェルの電磁気学では，電場のエネルギーは，$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi$，ラプラス方程式 $\triangle\Phi = -\rho/\epsilon_0$，および (13) 式を用いた簡単な変形で[*4)]

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2}\int |\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})|^2\, d\boldsymbol{r} \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\, d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{r}' \tag{16}$$

の等価な 2 式で与えられることが分かる．(15) 式では，エネルギー密度が電荷の周りの空間を満たす電場で与えられているが，(16) 式はクーロンエネルギーの重ね合わせだけで書かれている．前者は近接作用，後者は遠隔作用の見方をとったことになるが，この両者は静電気だけを考えれば全く同じ答を与える．その意味で，静電気だけを考えるなら，電場を導入しなくても支障がない．

3.2 運動する電荷

しかし，運動する電荷を扱う場合にはこの考え方は破綻する．遠隔作用であるクーロン力の特長は，電荷間の力が瞬時に伝わる点であるが，これを運動する電荷に適用すると，電荷 1 と 2 の間のクーロン力が，時刻 t の電荷 1 と 2 の位置だけで決まることになる．このことは，クーロン力が電荷の速度にはよらないことから，一見当り前と思われるかもしれない．しかし，近接作用の考え方では，時刻 t に点 1 にある電荷がその近傍に電場や磁場を作り，その電場，磁場（の変化）が有限の速度で周辺に伝わっていくことで 2 つの電荷が力を及ぼし合う．場の伝わる速度は電磁場の波動方程式が与える波の速度，つまり光速度でなければならない．

簡単のため，運動している点電荷を考える．(13) 式で電荷密度を $\rho(\boldsymbol{r}', t) = q\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0(t))$ としてみよう．すると，

$$\Phi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)|} \tag{17}$$

となるので，時刻 t での電荷 q の位置で決まるクーロンポテンシャルと同じで，あたかも遠隔作用を与えるように見える．実際にこの項の電場への寄与は瞬間的に伝わるクーロン力と同一である．しかし，この場合の電場には $\boldsymbol{A}$ の時間微分の寄与（(5) の第 2 項）がある．場 $\boldsymbol{A}$ が満たす方程式 (12) の右辺第 1 項は，点電荷の電荷の速度を $\boldsymbol{v}_0 = \dot{\boldsymbol{r}}_0$ とすると，$\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = q\mu_0\boldsymbol{v}_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ となって，電荷の位置 $\boldsymbol{r}_0$ に局所化している．しかし，第 2 項は

$$-\frac{1}{c^2}\boldsymbol{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{q\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$$

となる．したがって，場 $\boldsymbol{A}$ は，運動する電荷の位置 $\boldsymbol{r}_0$ だけでなく，空間全体に分布する“電流密度”を源

*4)　電荷分布および電場が空間の無限遠で十分速く 0 になると仮定する．

とする波動方程式を満たさなければならない．すなわち，点電荷によって局所的に生じるはずの場の源が非局所的に広がっていることが分かる．

このような現象は，ある瞬間の電荷の位置（と速度）だけで力が与えられるとする遠隔作用の考え方では対応できないことを示している．では運動する電荷による場はどのように決まっているのだろうか．

3.3 遅延ポテンシャル

上のように，$\boldsymbol{A}$ の方程式が非局所的で複雑な源を持つことになったのは，電磁場ポテンシャルに対してクーロンゲージ条件 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ を課したのが一因である．代わりに，空間と時間（相対論の時空）に関してより対称性の良い**ローレンスゲージ条件**[*5)]

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0 \tag{18}$$

を課すことにすると，(8) 式と (9) 式から

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\triangle\Phi=\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{19}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\triangle\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j} \tag{20}$$

を得る．

これらの方程式には，遅延ポテンシャル解と呼ばれる解

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t'_{\mathrm{R}})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\boldsymbol{r}', \tag{21}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t'_{\mathrm{R}})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\,d\boldsymbol{r}' \tag{22}$$

がある．ここで，

$$t'_{\mathrm{R}}=t'_{\mathrm{R}}(t,\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\equiv t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$$

で定義される**遅延時刻**で，時刻 t でのポテンシャルが距離 $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ 隔たった電荷・電流分布から $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|/c$ だけ遅れて伝わってきた効果を表す（図 3）．まさに，近接作用の考え方によっていることが分かる．

(21) 式が (19) 式の解になっていることは

$$\Phi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{\epsilon_0}G(t-t',|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)\,d\boldsymbol{r}'dt',$$

$$G(t,r)\equiv\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

と書き換えて，

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle\right)G(t,r)=\delta(t)\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$$

であることを用いて証明することができる．

*5) 次節で見るようにこの条件はローレンツ不変である．

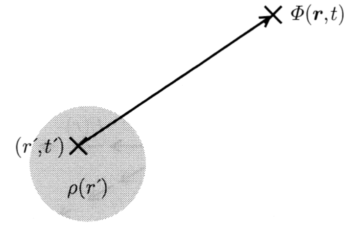


図 3 電荷の位置 $\boldsymbol{r}'$ とポテンシャルの座標 $\boldsymbol{r}$ の間を光速 c で結ぶ．$\Phi(\boldsymbol{r},t)$ は時刻 $t'=t-|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|/c$ における $\boldsymbol{r}'$ での電荷分布から決まる．

■ 4. 相対論とアインシュタインの因果律 ■

4.1 マクスウェル方程式のローレンツ共変な形

アインシュタインの相対論では，時間と空間座標は 4 次元座標 $x^\mu=(ct,\boldsymbol{r})$ としてローレンツ変換に従う．$\mu=(0,1,2,3)$ はそれぞれ 4 次元時空の時間成分，空間の 3 成分の添字である[*6)]．4 次元ベクトル形式の電磁場ポテンシャル $A^\mu\equiv((1/c)\Phi,\boldsymbol{A})$ を用いてローレンスゲージ条件 (18) は $\partial_\mu A^\mu=0$ とローレンツ不変な形で表される．ここで $\partial_\mu\equiv\partial/\partial x^\mu$ および繰り返されたギリシャ文字に関する和をとるアインシュタインの縮約規則を用いた．

電流密度の 4 次元ベクトル $j^\mu\equiv(c\rho,\boldsymbol{j})$ を用いると，(19) と (20) 式は簡潔に

$$\Box A^\mu=\mu_0 j^\mu \tag{23}$$

と書ける．ここで $\Box\equiv\partial_\mu\partial^\mu=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\triangle$.

(23) 式はマクスウェル方程式と等価であるが，（ローレンスゲージ条件の下で）明示的にローレンツ共変な形となっていて，マクスウェル方程式が相対論的な方程式であることを示している．逆に，ローレンツ変換の非相対論的極限であるガリレイ変換に対しては，マクスウェル方程式は共変ではない．ガリレイ変換は等速度で運動する 2 つの座標系の間の変換であるが，変換によって速度がシフトする．例えば，2 つの座標系の相対速度を $\boldsymbol{V}$ とすると，質点の速度は $\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}$ と変換される．この変換をそのままマクスウェル方程式に適用すると，光速度 $c=(\sqrt{\epsilon_0\mu_0})^{-1}$ が座標系ごとに異なる値を取ることになる．しかし，ϵ_0, μ_0 は方程式中の与えられた定数なので，座標系の取り方によってこれらが変化するのは都合が悪い．

一方，ローレンツ変換では，（簡単のため）速度方向

*6) メトリック $g^{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1,-1,-1,-1)$ を用いる．反変微分は $\partial^\mu=((1/c)\partial_t,-\boldsymbol{\nabla})$.

のローレンツブーストを考えると，変換は

$$v \to v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

で与えられる．$v = c$ の場合は $v' = c$ となって，光速で運動する粒子（あるいは波）は，変換後も光速で運動する．すなわち，光速が定数として与えられているマクスウェル方程式を不変にする変換はガリレイ変換ではなく，ローレンツ変換でなければならない．

電磁場ポテンシャル A^μ を用いて計算される電場と磁場は，反対称電磁場テンソル

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{24}$$

の成分として表される．ポテンシャル A^μ は一意的ではなく，ゲージ変換の分だけ不定性がある．4 次元ベクトルに対するゲージ変換は $A^\mu \to A^\mu - \partial^\mu \chi$ と書けるが，電場と磁場を表す $F^{\mu\nu}$ がこの変換の下で不変であることは明らかである．

4.2 アインシュタインの因果律

(21) 式の遅延ポテンシャル解も

$$A^\mu(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{j^\mu(\boldsymbol{r}', t'_\mathrm{R})}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, d\boldsymbol{r}'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int j^\mu(\boldsymbol{r}', t')\frac{\delta(t' - t + |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|/c)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, d\boldsymbol{r}' dt'$$

と変形すると，

$$A^\mu(x) = \frac{\mu_0}{2\pi}\int j^\mu(x')\, \delta((x - x')^2)\, d^4x'$$

とあらわに共変な形に表すことができる．デルタ関数は，4 次元時空点 $x = (ct, \boldsymbol{r})$ と $x' = (ct', \boldsymbol{r}')$ について $(x - x')^2 = (ct - ct')^2 - (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')^2 = 0$ のときに満たされ，点 x と x' とが光の経路（光円錐）で結ばれていることを示している（図 4）．

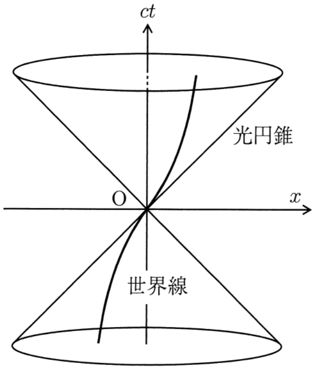


図 4 相対論の時空間，光円錐と世界線．

相対性理論では，運動する粒子の運動量を p とすると，エネルギーは $E = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$，速度は $v = pc^2/E$ で与えられ，常に $v \le c$（$m = 0$ の時に等号）を満たす．したがって，4 次元時空で粒子の運動を表す世界線は，常に光円錐（原点から見て，$x^2 = t(ct)^2 - \boldsymbol{r}^2 = 0$ を満たす 3 次元円錐面）の内側（$x^2 > 0$ の部分）を通る．粒子の運動に限らず，事象の原因がすべて光円錐の内側の過去の部分（$t < 0$）にあることが**アインシュタインの因果律**である[3]．

ローレンツ変換に対して共変で，相対性理論に従うマクスウェルの電磁気学においては，電磁場の情報が伝わる速度は光速度を超えることはできない．遠隔作用が想定するような離れた地点間に瞬間的に働く力は相対論では許されないことになる．結論として，遅延ポテンシャルにはっきり表されているように，時間に依存する電荷，電流によって生じる電磁場がアインシュタインの因果律に従うことは，近接作用の考え方と不可分であることが分かる．

5. 電磁波と場のエネルギー・運動量

近接作用を支える電磁場が実在であることの決定的な証拠は電磁波の存在である．再び，クーロンゲージ（$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$）による表式をとると，電荷や電流のない（あるいは十分遠い）空間での平面波解は $\varPhi = 0$ および

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}_0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t}$$

で与えられる（波動の複素数表示を用いる．物理的な波は実部で与えられる）．ここで，ω は角振動数，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで，波動方程式から $\omega = c|\boldsymbol{k}|$ を満たす．$\boldsymbol{A}_0$ は定ベクトルを表し，横波条件から，$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}_0 = 0$，すなわち波の振動方向と伝播方向は直交する（図 5）．

対応する電場と磁場の振幅は

$$\boldsymbol{E}_0 = i\omega \boldsymbol{A}_0,$$

$$\boldsymbol{B}_0 = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}_0 = \frac{1}{c}\hat{\boldsymbol{k}} \times \boldsymbol{E}_0$$

となる．ここで，$\hat{\boldsymbol{k}}$ は，$\boldsymbol{k}$ 方向の単位ベクトルを表す．

平面波は電場と磁場の双方が同じ位相で振動して波として伝わっていくもので，それに伴ってエネルギーが伝播する．地球は太陽からの電磁波（可視光，赤外線など）が運んでくるエネルギーを吸収して生命を育んできた．過去の太陽エネルギーの蓄積である化石燃

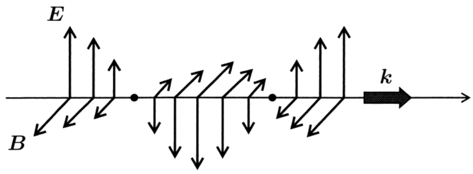


図 5　電磁波の伝播.

料も含めて，太陽が地球の最大のエネルギー源であることは明らかである．電場や磁場が電荷や電流に与える力の仕事は電磁場が電荷，電流に与えるエネルギーであることを用いると，電磁場の**エネルギー密度**とエネルギーの流れを表す**ポインティングベクトル**がそれぞれ

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2, \tag{25}$$

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{26}$$

で与えられる．

平面波のエネルギー密度とポインティングベクトルは，振動周期について平均をとって

$$\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{\epsilon_0}{4}|\boldsymbol{E}_0|^2 + \frac{1}{4\mu_0}|\boldsymbol{B}_0|^2 = \frac{\epsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}_0|^2,$$

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0 = \frac{\epsilon_0}{2}|\boldsymbol{E}_0|^2\,c\hat{\boldsymbol{k}}$$

となり，確かに波のエネルギーが $\boldsymbol{k}$ の方向に速さ c で伝播していることが確かめられる．

さらに電磁波は運動量も持ち，圧力も与える．平面電磁波の運動量密度の時間平均は

$$\langle\boldsymbol{P}\rangle = \epsilon_0\langle\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\rangle = \frac{\epsilon_0}{2c}\,\hat{\boldsymbol{k}}\,\boldsymbol{E}_0^2 \tag{27}$$

で，電磁波のエネルギー密度と $\langle\mathcal{E}\rangle = c|\langle\boldsymbol{P}\rangle|$ の関係を満たす．これは，相対論で質量が 0 の粒子のエネルギーと運動量の関係と一致する*7)．また，電磁場の応力テンソル $\mathcal{T}_{ij}$ から電磁波の圧力（輻射圧）を求めることができる．平面波の進行方向に垂直な平面に与える圧力はエネルギー密度に等しい．

$$P = -\hat{k}_i\hat{k}_j\langle\mathcal{T}_{ij}\rangle = \frac{\epsilon_0}{2}\langle\boldsymbol{E}^2\rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle\boldsymbol{B}^2\rangle = \langle\mathcal{E}\rangle.$$

■　6. ベクトルポテンシャルの意味　■

6.1 電磁場の基本場としてのポテンシャル

さて，電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ は，(5), (6) 式によってポテンシャル Φ と $\boldsymbol{A}$ を用いて表される．しかし，古典電磁気学では，観測される場はあくまでも電場と磁場で，ポテンシャルの役割は補助的と考えられている．一方で，相対論による 4 次元形式では，ポテンシャルが 4 次元ベクトル $A^\mu = (\Phi/c, \boldsymbol{A})$ で表されるのに対して，電場と磁場は A^μ を用いて反対称テンソル $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ の成分として表されることからもわかるように，ポテンシャルがより基本的な場と考えるほうが自然である．

A^μ をより基本的な場とすることの難点は，ゲージ変換の自由度があるために，ポテンシャルが一意的に決まらないことである．しかし，運動方程式がゲージ変換に対して不変であれば，観測量は一意的である．例として，電荷 e を持った粒子の電磁場の元での（非相対論的）運動を考える．運動を記述するラグランジアンは

$$L(\boldsymbol{r},\dot{\boldsymbol{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{r}}^2 - e\Phi(\boldsymbol{r}) + e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

で与えられる．(10) 式のゲージ変換によって，ラグランジアンの変化は

$$\delta L = e\left[\frac{\partial\chi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\chi(\boldsymbol{r},t)\right] = e\frac{d\chi(\boldsymbol{r},t)}{dt}$$

となって，全微分で書けるから運動方程式には影響を及ぼさない．対応するハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) = \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right)^2 + e\Phi(\boldsymbol{r})$$

は，電磁場中での荷電粒子の量子力学における標準的なハミルトニアンを与える．このラグランジアンとハミルトニアンはいずれも，粒子の位置での電磁場ポテンシャルが局所的な近接作用を電荷に与えることを表す．

6.2 アハラノフ・ボーム効果

さらに，電磁場と相互作用する粒子の量子力学では波動関数の位相にベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の効果が現れる．干渉効果でこの位相の差を観測できる現象は**アハラノフ・ボーム効果**と呼ばれる[4]．始点 A と終点 B を結ぶ経路 C に添って電荷が移動するとき，$\boldsymbol{A}$ の経路上での積分

$$i\int_C e\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})dt = i\int_C e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \tag{28}$$

が波動関数の位相として現れる．この積分はゲージ変換の元で

$$i\int_C e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} + ie(\chi(\mathrm{B}) - \chi(\mathrm{A}))$$

と変換される．波動関数の位相そのものは観測可能な

*7)　電磁場（光）を量子力学的に扱うと，質量が 0 の光子の集まりで表されることに対応する．

量ではないが，A と B を結ぶ 2 つ（以上）の経路からの寄与がある場合には，異なる経路の位相差を干渉効果によって観測することができる．その位相差は A から B へ行く経路と B から A へ異なる経路で帰る経路の組合せとしての閉じた経路上での積分

$$i \oint_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}} e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} \tag{29}$$

で与えられる．この積分は始点と終点が同一なので，ゲージ変換によらない**ゲージ不変量**となっている．

6.3 独立な自由度

このようにして，電磁場は電場と磁場に代わって，空間の各点に 4 次元ポテンシャル $A^{\mu}(\boldsymbol{r}, t)$ を定義することによって表されることが明らかになった．しかし，物理的に意味のある変数は Φ と $\boldsymbol{A}$ の 3 成分の 4 個の関数にゲージ条件を課したものになる．クーロンゲージでは $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$ の条件を課すことにより，Φ の時間依存性は自明になってしまうため，独立な力学変数として $\boldsymbol{A}$ の横波成分だけが必要であることが分かる*8)．

■ 7. おわりに ■

本稿では，マクスウェルの電磁気学にそって，場と近接作用の考え方について見てきた．マクスウェルの理論は，空間を満たす電磁場ポテンシャルを基本とし，ポテンシャルから導かれる電場・磁場が電荷・電流と近接作用により力を及ぼし合う関係から成り立っている．電磁場は，エネルギーや運動量を持ち，それを電磁波として遠方へと運ぶことができる．電磁波は媒質を必要とせず，電磁場の振動が真空中を波として伝わる現象である．

現代物理学では，電磁場に類似の様々な場を導入して，それらの相互作用を定式化する．場はそれ自身を見る（観測する）ことはできないが，場の振動である波を通じて，物質と相互作用する．実は，電荷を持つ電子や原子核の中に存在するクォークといった素粒子も元々は場として与えられ，それぞれの場の振動を量子力学を用いて扱うことにより，粒子としての性質を獲得すると考えられている．そのような理論では，空っぽであるはずの真空も多種多様な場とその振動に満たされているのである．電磁場と同様にそれらの振動も波として空間を伝わっていって，離れた場所にエネルギーや運動量を伝えることができる．

このように，場とその振動は現代物理学の最も基本的な考え方であり，電磁場はその最も身近な例であるということができる．

*8) 他のゲージ条件の取り方では，この事実は自明ではない．

参考文献

1) マクスウェル方程式と電磁気学に関しては多くの優れた教科書がある．手軽な教科書として，砂川重信『電磁気学』(岩波書店，物理テキストシリーズ，1987 年)；岡真『電磁場の古典論』(培風館，新物理学シリーズ，2009 年)．
2) A.A. Michelson and E.W. Morley, *American Journal of Science* **34** (1887), 333–345.
3) アインシュタインの相対論における因果律については，本誌の小玉英雄氏の記事「アインシュタインの特殊相対性理論—空間的に離れた 2 点の同時性の問題」を参照．
4) Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959), 485–491.

（おか・まこと，東京工業大学大学院理工学研究科）

アインシュタインの特殊相対性理論

空間的に離れた2点の同時性の問題



小玉　英雄

特殊相対性理論は，次の2つの基本要請を満たす物理法則の全体を記述する枠組みである：

> **特殊相対性理論の公理**
>
> **特殊相対性原理**：すべての慣性系で物理法則は同じ表式で表される．
>
> **光速不変性**：すべての慣性系で真空中の光速は方向によらず同じである．

この理論は，最初，1905年にアインシュタインにより「運動する物体の電気力学」として発表されたが[1)]，これは，当時知られていた自然界の力ないし相互作用が，電磁相互作用と重力相互作用のみであったことに起因する．実際，現在では，重力を除くすべての相互作用を記述する理論形式として用いられている．

特殊相対性理論の要請は，一見，さほど強力には見えない．しかし，結果として，ニュートン理論の基礎となっていた時間空間の概念を大きく変革することになった．その最大の要因は，ニュートン理論には存在しない2番目の光速不変性の要請にある．本稿では，この要請がもたらした時間空間概念の変革について，同時性の問題を中心として解説する．

1. 時計の同期化と慣性座標系

特殊相対性理論の公理では，「慣性系」がキーワードとなっているが，その定義は与えられていない．この状況は，ニュートン理論と似ている．実際，ニュートンの運動法則は，次の公理で与えられるが，これらの法則がどのような基準系で成り立つのかが書かれていない．

> **ニュートン力学の公理**
>
> **第1法則**（慣性の法則）質点は，力を受けない限り，速度を保つ．
>
> **第2法則**（運動方程式）質点の加速度を $\boldsymbol{a}$，質量を m，質点に作用する力を $\boldsymbol{F}$ とするとき，$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$．
>
> **第3法則**（作用反作用の法則）2つの質点の間に力は，向きが反対で同じ大きさをもつ．

しかし，よく見てみると，実は，第1法則がこれらの法則が成り立つ基準系を間接的に指定していることに気づく．実際，ある基準系でこの法則が成り立つとき，それに対して加速する基準系ではもはやこの法則が成り立たないのは明らかである．すなわち，残りの2法則は，慣性の法則が成り立つ基準系である慣性系，より正確にはそれに付随する慣性座標系において成立するということになる．

この観点から特殊相対性理論の公理を見ると，慣性の法則の代わりに，光速不変性の要請が慣性座標系を定義していることが分かる．そこで，アインシュタインは光速不変性が具体的に慣性座標系の関係をどのように規定するかを詳しく調べ，ニュートン物理とは大きく異なる時空概念に到達

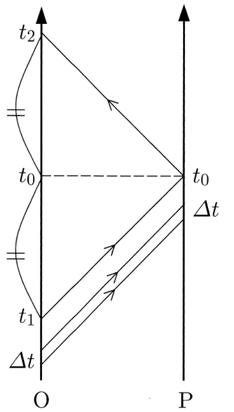


図 1　時計の同期化.

したのである．この研究において，徹底した実証主義者である彼は，まず出発点として，光速不変性に基づいて慣性座標系を実際に構成する方法を考えた[*1)1)]．

物理法則を記述する座標系は時間座標と空間座標からなり，通常，両者は性質の異なるものとして扱われる，まず，時間座標は時計の読みにより決定されるが，一個の時計だけではその位置での時間しか決まらない．したがって，任意の点における時間座標を定義するには，原理的には，空間の各点で時計を用意する必要がある．さらに，これらの時計は「正しい」時計で，その進みや時刻の原点が揃っていないといけない．この揃った時計を用意する操作を**時計の同期化**と呼ぶ．

この同期化は原理的には次の方法で実現される（図 1 参照）．まず，時間の進みの同期は，空間の原点 O に一個「正しい」時計（標準時計）を用意し，それを基準にして光により他の時計に時報を送ることにより行う．次に，原点以外の時計間で時報を交換し，進みが合っているかどうかを確認する．相対的に運動している時計では，この際に進みが合わなくなる．したがって，この操作で，標準時計に対して相対的に静止した時計の集団が選ばれる．次に，時刻の原点の調節であるが，これは，原点にある標準時計から送られた時報を各点の時計から送り返してもらうことにより実現される．すなわち，時計 O から時刻 t_1 に出た信号が，時計 P にその時刻で t_0 に届き，それを送り返した信号が t_2 に原点に戻るとき，$(t_1+t_2)/2=t_0$ となるように時計 P の時刻の原点を調節するのである．この操作を，すべての時計の組で行い，矛盾がないかを確認する．

特殊相対性理論の公理が成り立ち，かつ時間空間が均一である限り，以上の操作により整合的に同期化された時計の集団が定義され，各時計が「空間点」を定義されるはずである．逆に，この同期化ができない場合，特殊相対性理論は成り立たないことになる．実際，一般相対性理論では，重力場が存在すると時間空間が不均一となり，このような時計の同期は失敗する．例えば，非回転的な天体の作る静的重力場中では，上の同期操作は可能であるが，同期された異なる点の時計を同じ点に持ってくると，両者の進みは一致しない．これは，重力赤方偏移のためで，この場合には同期化された時間空間座標において物理法則の空間的一様性が破れることになる．また，回転する天体の作る重力場中では，時間の進みの同期化は可能であるが，時刻の原点を整合的に同期化することはできない[2)]．すなわち，同時性の概念は大域的にはそもそも存在しない．

次に，空間座標（の差）は空間的距離ないし長さと対応する．空間を時計の集団として仮想的に実体化すると，各時計にラベル (x,y,z) を与えることにより空間座標が定義される．そして異なる時計の座標差 $(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$ を用いてそれらの距離を $\Delta l=(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2)^{1/2}$ により定義すると，それから導かれる幾何学はユークリッド幾何学となる．ただし，ここでの空間座標の取り方はほぼ任意に近い．しかし，光速不変性を要求すると，座標系は非常に制限される．実際，光速の値を c と表すと，空間の 2 点 P と Q の空間的距離 Δl は，上で述べた時計の同期化の下で，点 P から送られた光の信号が点 Q に届くのに要する時間 Δt を用いて，$\Delta l=c\Delta t$ と表される．したがって，任意の 2 点間の距離が決まるので，この距離が上記のユークリッド距離と一致することを要求すると，

*1)　以下，特に断らない限り，光は真空中で伝播するものとする．

空間座標系 (x,y,z) は回転，反転と並進の自由度を除いて一意的に決まる．すなわち，光速不変性が成り立つなら，時計と光信号のみで長さを定義することができ，物差しは不要となる．この観点から，現在の国際単位系では，光速の値は測定値ではなく，固定された定数 $c=299,792,458[\mathrm{m/s}]$ となっており，1 秒 (s) は Cs^{133} 原子のスペクトルにより物理的に定義されているが[*2]，1 m は 1 秒間に真空中で光の走る距離 ÷ c と定義されている．

以上見てきたように，光速不変性の要請は，(原理的にではあるが) 操作的に慣性座標系を選別することを可能にするが，この操作的定義は，特殊相対性理論では時間の概念が局所的であることを示している．すなわち，各事象の起きた時間は，その事象の起きた場所にある時計でのみ計測可能であり，空間的に異なる位置で起きた事象の発生時刻の比較は，最終的に，時計の同期化に相当する光信号の交換によって初めて可能となる．この時間の局所性は，特殊相対性理論により記述される現象の理解において大変重要となる．

2. ローレンツ変換

光速不変性は，異なる慣性座標系での光速が一致することを要求するが，この要求は異なる慣性座標系間の変換則をほぼ一意的に決定する．

慣性座標系 S:$(x^a; a=0,1,2,3)=(ct,x,y,z)$ $=(ct,\boldsymbol{r})$ において，点 $(ct_0,\boldsymbol{r}_0)$ を通過する光波面の軌跡は，$(\Delta x^0,\Delta\boldsymbol{r})=(c(t-t_0),\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$ を用いて

$$\Delta s^2 := \eta_{ab}\Delta x^a \Delta x^b = 0 \tag{1}$$

と表される[*3]．ここで，η_{ab} は次の対角型行列の成分である：

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

*2) $1\,\mathrm{s}=\mathrm{Cs}^{133}$ 原子の基底状態超微細構造準位間遷移により放射される電波の周期 × 9,192,631,770.

*3) 以下，同じ項で 2 度現れる添え字についてはその添え字の動く範囲について和を取るというアインシュタインの和の規約を用い，和の記号を省略する．

この光波面の伝播を別の慣性座標系 S′:$(ct',\boldsymbol{r}')$ で記述すると，$(\Delta x'^0,\Delta\boldsymbol{r}')=(c(t'-t'_0),\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}'_0)$ を用いて

$$\Delta s'^2 := \eta_{ab}\Delta x'^a \Delta x'^b = 0 \tag{3}$$

と表される．2 つの座標系の間の変換則を一般に $x'^a=x'^a(x)$ と表すとき，$\Delta x^a \to 0$ の極限で 2 つの方程式が同値になる条件は，

$$\eta_{cd}\frac{\partial x'^c}{\partial x^a}\frac{\partial x'^d}{\partial x^b} = \sigma(x)\eta_{ab} \tag{4}$$

となる．ここで，$\sigma(x)$ は正の任意関数である．

この条件を満たす変換のうち，時間空間全体で定義される正則な変換は，σ が定数のときにのみ存在し，次の 1 次変換で表されることが示される[3)]：

$$x'^a = \sigma(\Lambda^a{}_b x^b + A^a). \tag{5}$$

ここで，$\Lambda=(\Lambda^a{}_b)$ は次の条件を満たす行列である：

$$\eta_{ab}\Lambda^a{}_c\Lambda^b{}_d = \eta_{cd}. \tag{6}$$

この変換で $\sigma=1$ とおいたものは，**一般ローレンツ変換**ないし**ポアンカレ変換**と呼ばれる．

この一般式では，ローレンツ変換がどのような構造をしているのか分かりづらい．そこで，この変換が t と空間座標の 1 成分 x のみの間の変換となる場合 (特殊ローレンツ変換) について，その表式を具体的に求めてみよう．このとき，$(\Lambda^a{}_b)$ $(a,b=2,3)$ は 2 次の単位行列となるので，(6) は

$$(\Lambda^0{}_0)^2-(\Lambda^1{}_0)^2=1, \quad \Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1=\Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1,$$
$$(\Lambda^1{}_1)^2-(\Lambda^0{}_1)^2=1$$

となる．この一般解は，

$$\Lambda^0{}_0=\epsilon_0\cosh\lambda, \quad \Lambda^0{}_1=-\epsilon_0\sinh\lambda,$$
$$\Lambda^1{}_0=-\epsilon_1\sinh\lambda, \quad \Lambda^1{}_1=\epsilon_1\cosh\lambda$$

で与えられる．ここで，$\epsilon_0,\epsilon_1=\pm1$ で，λ は任意定数である．座標表示では，

$$ct'=\epsilon_0\gamma(ct-\beta x)+A^0, \tag{7a}$$

$$x'=\epsilon_1\gamma(x-\beta ct)+A^1, \tag{7b}$$

$$y'=y+A^2, \quad z'=z+A^3. \tag{7c}$$

ここで，$\beta=\tanh\lambda$ で，γ は β を用いて

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8}$$

で与えられる．慣性座標系 S′ の原点 $x' = 0$ は，慣性座標系 S から見ると，$x = \beta ct + \mathrm{const.}$ と表されるので，β は S′ の S に対する速度 v を用いて，$\beta = v/c$ と表されることがわかる．A^0, A^1 は明らかに，座標系 S′ の原点の自由度を表す．また，符号 ϵ_0, ϵ_1 は，それぞれ，時間と空間の向きと対応する．

相対速度ベクトルと座標軸の関係が一般の場合のローレンツ変換は，適当な空間座標軸の回転により，この特殊な場合に帰着される．具体的な表式は，慣性座標系 S′ の慣性座標系 S に対する速度ベクトル $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{\beta}$ と空間座標の回転・反転を表す直交行列 R を用いて次式で与えられる[2)]：

$$ct' = \epsilon_0\gamma(ct - \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r}) + A^0, \tag{9a}$$

$$\boldsymbol{r} = R\left(\boldsymbol{r} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\beta} - \gamma\boldsymbol{v}t\right) + \boldsymbol{A}. \tag{9b}$$

3. 同時性と因果律

特殊ローレンツ変換 (7) を，ニュートン理論における慣性系の変換則であるガリレイ変換

$$t' = t + B^0, \quad x' = x - vt + B^1 \tag{10}$$

を比較すると，いくつかの大きな違いに気づく．まず，ガリレイ変換では，時間座標の差は不変に保たれる．これは，時間が空間と独立した絶対的で大域的な意味を持つことを意味する．これに対して，ローレンツ変換では，時間座標の変換に空間座標が混ざってくる．これは，特殊相対性理論では，時間は局所的でかつ基準系に相対的な概念で，時間と空間が不可分の関係にあることを意味する．

特に，ニュートン理論では絶対的な意味を持っていた同時性の概念は，特殊相対性理論では基準系に相対的な概念となる．実際，慣性系 S′ での 2 つの事象の時間差 $\Delta t'$ は，慣性系 S での対応する時間差 Δt と x 座標の差 Δx を用いて

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) \tag{11}$$

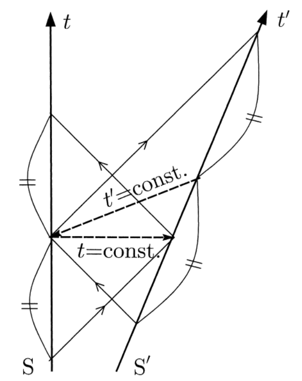


図 2　相対運動する観測者の同時面.

と表される．明らかに，$v \neq 0$ のとき，慣性系 S で同時（$\Delta t = 0$）でも，2 点が空間的に離れていると，$\Delta t' \neq 0$ となり，慣性系 S′ から見ると同時ではなくなる（図 2 参照）．このため，時間座標による未来，過去の区別は，観測者に依存することになり，絶対的な意味を失う．

この結果は，因果律に重大な影響を及ぼす．ニュートン理論では，原因，結果の区別が時間的順序により決まることを自然法則の因果律と見なす．特殊相対性理論では，もはや，この意味での因果律は成立しない．しかし，よく見てみると，少し違った形の因果律が成り立つことが分かる．

これを見るために，ローレンツ変換の式 (9) に戻ろう．この式において，$\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ は $|\boldsymbol{\beta}| > 1$，すなわち $|\boldsymbol{v}| > c$ となる場合，虚数となり，関係式が意味を失う．これは，相対速度が光速を超える慣性系が存在しないことを意味し，粒子の速度が光速を超えられないことを示唆する．

同じ結論は，粒子の運動量についての考察からも得られる．特殊相対性理論では，粒子の運動に沿った（無限小）時間間隔 dt や（無限小）空間距離 $|d\boldsymbol{r}|$ はローレンツ変換で変化するが，ローレンツ変換の定義より，

$$ds^2 = -c^2dt^2 + d\boldsymbol{r}^2 \tag{12}$$

の値は不変に保たれる．$ds^2 < 0$ のとき，この不変量を用いて $d\tau^2 = -ds^2/c^2$ で定義される（無限小）時間間隔 $d\tau$ は，各瞬間で粒子に対して静

止した標準時計で計った時間間隔と一致し，その積分で定義される時間 τ は粒子の**固有時**と呼ばれる．この固有時を用いて，

$$u^0 = c\frac{dt}{d\tau} = c\gamma, \quad u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \gamma v^i \qquad (13)$$

で定義される 4 成分ベクトル $(u^a) = (u^0, u^i)$ は，ローレンツ変換に対して 4 次元時空のベクトル（4 元ベクトル）として変換する：

$$u'^a = \Lambda^a{}_b u^b. \qquad (14)$$

粒子が静止しているときの質量 m_0 を不変定数とすると，$p^a = m_0 u^a$ はローレンツ変換に対して 4 元ベクトルとして変換し，速度が小さい極限で，その空間成分はニュートン理論における運動量ベクトルと一致する：

$$\beta \ll 1 \implies \boldsymbol{p} \to m_0\boldsymbol{v}. \qquad (15)$$

また，その時間成分は，同じ極限で

$$\beta \ll 1 \implies cp^0 \to m_0c^2 + \frac{m_0}{2}v^2 \qquad (16)$$

となる．そこで，一般の運動状態においても，$\boldsymbol{p}$ を運動量，$cp^0 - m_0c^2$ を運動エネルギーと定義する．このとき，p^a が 4 元ベクトルとして振る舞うので，粒子系における総運動量 $\boldsymbol{P} = \sum \boldsymbol{p}$ の保存則がすべての慣性系で成り立つことより，$P^0 = \sum p^0$ の保存則が得られる．したがって，m_0 が反応で Δm_0 だけ変化すると，$\Delta m_0 c^2$ に相当する運動エネルギーが得られるという有名なアインシュタインの関係式が導かれる．この静止質量のエネルギーと運動エネルギーの総和をエネルギー E と定義すると，$p^0 = E/c$ と表される．

このように定義された粒子の運動量とエネルギーは，静止質量と速度を用いて

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = \gamma m_0 \boldsymbol{v}, \quad E = mc^2 = \gamma m_0 c^2 \qquad (17)$$

と表される．明らかに，粒子の速度が光速を超えると，γ が虚数となるので，エネルギーや運動量が実数とすると，静止質量も虚数となる．これは，このような粒子が存在するとすると，それは慣性系に対して静止できないことを意味する．このような粒子は，**タキオン**と呼ばれる．

これまで安定なタキオンの存在を示す事実はないので，タキオンが存在しないとすると，光速がすべての粒子の速度の上限となる．すなわち，エネルギーを伴った情報は光速以下の速度でしか伝播しない．そこで，ある時空点 O を基点として，時空においてその点を通過する光線の軌跡の全体が作る光円錐 $C : c^2(\Delta t)^2 = (\Delta \boldsymbol{r})^2$ により，時空を 3 つの領域 $J^+(\mathrm{O}) : c\Delta t \geq |\Delta \boldsymbol{r}|$, $J^-(\mathrm{O}) : c\Delta t \leq -|\Delta \boldsymbol{r}|$, $S(\mathrm{O}) : c^2(\Delta t)^2 < (\Delta \boldsymbol{r})^2$ に分けると，O からの情報は $J^+(\mathrm{O})$ のみに伝わることになる．また，$J^-(\mathrm{O})$ のみが O に影響を与え，$S(\mathrm{O})$ に属する点 P と点 O の間で因果的関係が生まれることはない．光円錐はローレンツ変換で不変なので，この光円錐を基準とした因果関係は，慣性座標系の取り方によらない意味をもつ．したがって，特殊相対性理論でも因果律が成り立つことになる．$J^+(\mathrm{O})$, $J^-(\mathrm{O})$ および $S(\mathrm{O})$ は，それぞれ，時空点 O の**因果的未来**，**因果的過去**，**空間的領域**と呼ばれる（図 3）．

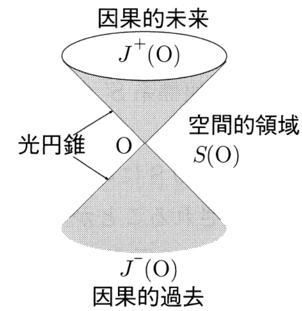


図 3　特殊相対性理論の因果構造.

このように，ニュートン理論では空間的面で表された同時関係が，特殊相対性理論では空間的領域 $S(\mathrm{O})$ に拡大されるが，実は，ニュートン理論の同時面は，光速が無限大となった極限において，$S(\mathrm{O})$ が面につぶれたものと見なすことができる．実際，一般ローレンツ変換 (9) において，$t, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ を一定にして $c \to \infty$ の極限をとると，ガリレイ変換が得られることが容易に確かめられる．

4. 双子のパラドクス

ローレンツ変換とガリレイ変換のもう一つの大

きな違いは，2つの事象の時間間隔や空間的距離が観測者により変化することである．例えば，変換 (7) において，慣性系 S′ の原点に静止した時計の進み $\Delta t'$ は，$\Delta x = v\Delta t$ を用いると，Δt により

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} \tag{18}$$

と表される．これは，慣性系 S に対して速さ v で運動する時計の進みが，S の時計の $1/\gamma$ 倍に遅くなることを意味する．

ただし，この運動する時計の遅れの公式を等速直線運動以外の一般的な運動に適用する際には注意を要する．その代表例が，有名な**双子のパラドクス**である．

地球で生まれ育った双子の兄弟の太郎と次郎のうち，次郎が宇宙旅行に出かけるとする．簡単のため，地球は慣性系でよく近似されるとする．また，次郎は，地球と別の天体の間を等速 v で往復するとする．このとき，太郎を S，次郎を S′ として上の公式を適用すると，出発してから再会するまでに太郎の時計でかかった時間 Δt_{T} と次郎の時計で計った時間 Δt_{J} は，$\Delta t_{\mathrm{J}} = \Delta t_{\mathrm{T}}/\gamma$ の関係で結ばれることになる．常に，$\gamma > 1$ なので，これは，再会したとき，次郎が太郎より若くなることを意味する．一方，行きと帰りのそれぞれでは次郎は太郎に対して等速直線運動しているので，次郎を基準にして考えると，今度は，太郎が次郎に対して一定速度 v で往復運動することになる．したがって，公式より，今度は $\Delta t_{\mathrm{T}} = \Delta t_{\mathrm{J}}/\gamma$ となる．これは，太郎が次郎より若くなることを意味し，矛盾してしまう．

このパラドクスは，次のようにして解消される．図 4 を見て頂きたい．この図には，次郎が等速直線運動をしているときの同時面が破線で示されている．行きと帰りで運動方向が異なるので，同時面も変化する．その結果，図にあるように，太郎の世界線のうち，次郎の行きと帰りの行程と同時面で対応するのは太い実線で表される部分となる．最初の節で説明した同期化による時刻の大域的定義に基づくと，公式 (18) は，時間 t を計る時計を基準として，その同時面により対応する運動する

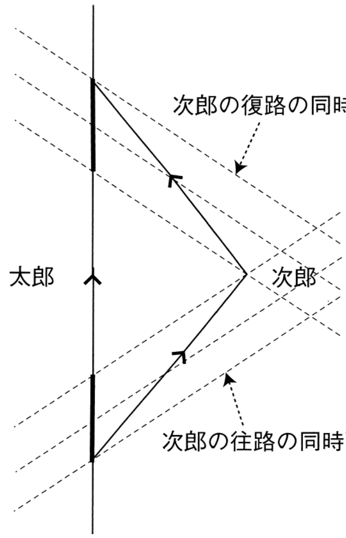


図 4　双子のパラドクスにおける時間の比較．

時計の時刻 t' と基準時計の時刻 t の進みの関係を表すものである．したがって，次郎を基準にした場合，$\Delta t_{\mathrm{T}} = \Delta t_{\mathrm{J}}/\gamma$ は，太郎の世界線のうち太線の部分と次郎が計った往復の時間を比較したもので，太郎の時計の経過時間の一部しか見ていないことになる．特殊ローレンツ変換の式より，次郎が天体に到着したときの同時面は，太郎の座標系で $ct = \beta x + \mathrm{const.}$ と表されるので，太郎の世界線のうち次郎の同時面でカバーできない部分での太郎の時間は，$\beta^2 \Delta t_{\mathrm{T}}$ となる．したがって，$\Delta t_{\mathrm{T}} = \Delta t_{\mathrm{J}}/\gamma + \beta^2 \Delta t_{\mathrm{T}}$ の関係が成り立ち，結局，常に慣性系にとどまる太郎を基準にした場合の結果と一致する関係 $\Delta t_{\mathrm{T}} = \gamma \Delta t_{\mathrm{J}}$ が得られる．すなわち，再会したとき次郎が太郎より若くなっているというのが正解であることが分かる．

5. 法則の局所性

ニュートン理論と特殊相対性理論における因果構造の違いは，物理法則の記述法に大きな違いを生み出す．まず，情報伝達速度が無限大のニュートン理論では，力も瞬時に伝わるため，粒子間の相互作用は同時刻での粒子間力により表される．ニュートン理論は，本質的に，すべての力が物体・物質を構成する要素的な質点ないし粒子の間の 2

体力に還元できることを想定している．第1節にあげたニュートン力学の第3法則（作用反作用の法則）に，そのことが明確に反映されている．したがって，この2体力の振舞いを指定すれば，運動法則と合わせて物理法則が完結する．

これに対して，特殊相対性理論では光速という情報伝達の上限速度が存在する．このため，粒子Aの状態の変化が別の位置にいる粒子Bに伝わるには距離に比例した時間がかかる．粒子Bが粒子Aの作用で状態が変化すると，その影響がもとの粒子Aに伝わるにはさらに遅れが生じる．このような相互作用の遅延を2体力により記述しようとすると非常に複雑になる．

この問題を解消してくれるのが，場の概念である．すなわち，時空的に広がった新たな実体 $\phi(t,\boldsymbol{r})$ を導入し，粒子間の相互作用を粒子間力ではなく，この新たな実体である場と粒子の局所的な相互作用として記述することにする．この記述方法では，粒子Aの状態変化は，その時空点での場 ϕ の局所的な変動を生み出す．この変動は，場の独自の力学により時空を伝搬し，粒子Bの位置に到達すると，その状態を変化させる．

この方法では，物理法則は，場の粒子に対する作用を記述する力の方程式と，場の変動の粒子による生成と伝搬を記述する場の方程式という完全に局所的な2種類の方程式系で記述されることになる．例えば，荷電粒子系の相互作用を記述するには，電磁場を表す2階反対称テンソル場 F_{ab} を導入し，その電荷 q をもつ粒子に対する作用を

$$\frac{dp^a}{d\tau} = F^a, \quad F^a = \frac{q}{c}F^{ab}u_b \tag{19}$$

により定義する．ただし，テンソルの添え字の上げ下げは，η_{ab} を用いるものとする．例えば，$u_a = \eta_{ab}u^b$．このとき，F_{ab} は，次のマクスウェル方程式に相当する場の方程式

$$\partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab} = 0, \tag{20a}$$

$$\partial_b F^{ab} = J^a \tag{20b}$$

に従う．ここで，$J^a = \sum_\alpha c^{-1} q_\alpha u^a_\alpha \delta^3(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_\alpha)$ は4元電流密度で，∂_a は座標による偏微分 ∂/∂_a を意味する．

この場の方程式の第1式は，よく知られているように，F_{ab} が電磁ポテンシャル A_a を用いて $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ と表されることと同等である．このポテンシャルのゲージ自由度 $A_a \to A_a + \partial_a\lambda$ を，条件 $\partial_a A^a = 0$ により部分的に固定すると，場の方程式の2番目の式は，波動方程式

$$\Box A_a \equiv \left(-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \triangle\right) A_a = -J_a \tag{21}$$

に帰着する．この波動方程式の一般解は

$$A_a(t,\boldsymbol{r}) = A_a^{(0)}(t,\boldsymbol{r}) + \frac{1}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{r}' \frac{J_a(ct - |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|, \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{22}$$

で与えられる[2]．ここで，$A_a^{(0)}$ は $J^a = 0$ の場合の解である．この式の第2項は，電荷の運動の情報が光円錐 $c\varDelta t = |\boldsymbol{\varDelta r}|$ に沿って伝わることを示しており，上記の力の方程式に代入すると，粒子間の遅延相互作用による記述を与える．

このように，特殊相対性理論では，場はすべての相互作用を局所的な方程式により記述することを可能にするが，それは単に遅延相互作用を局所的な方程式で書くための数学的手段ではない．その理由は，(22) の第1項にある．この項は，電磁場が荷電粒子とは独立な力学自由度を持つことを表している．すなわち，特殊相対性理論では，光速不変性は相互作用の局所性を要求し，最終的にすべての相互作用に新たな力学的実体としての場が対応することになる．理論を量子化すると，これらの場には独自の量子＝粒子が対応するので，結局，すべての自然現象が粒子の生成・消滅と伝搬に帰着されることになる．光速不変性恐るべしである．

参考文献

1) Einstein, A.: Zur Electrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **17**, 891–921 (1905).
2) 小玉英雄：『相対性理論』（培風館，1997）．
3) 小玉英雄：群と相対性理論，「数理科学」**601**, 20–25 (2013).

（こだま・ひでお，高エネルギー加速器研究機構）

アインシュタインの一般相対論

場の理論からニュートンの法則へ



窪田 高弘

1. 平川浩正先生のレポート問題

今からちょうど40年前，理学部物理学科4年生の学生だった筆者は，故平川浩正先生の一般相対論の授業を聴講した．約3カ月間で合計12回の講義であったが，ハッブル定数の測定，ウェーバーらによる重力波観測の試み，中性子星の重力平衡，当時発表されたばかりのシャピロたちによるレーダー・エコーの遅れの実験，等々を取り入れた実に盛りだくさんな内容の講義であった．完成された学問としてではなく，発展途上の科学としての一般相対論の姿を，平川先生は我々学生に提示して下さったのだと思う．筆者は，当時の講義ノートを今でも大切に保存している．

この講義の最後の頃，平川先生は我々学生にレポート問題を2つ課された．そのうちの1つは次のものであった．

> **レポート問題 1**　ニュートンの万有引力の法則とクーロンの法則を比べれば，重力場が電磁場と同形で符号のみが異なるような法則に従う場であると考えるのが自然に思える．この考え方が支持されない理由を記述せよ．

筆者もこのレポート問題の解答を提出したはずなのだが，どのようなレポートを書いたのか，今となっては全く思い出すことができない．

ところで今回編集部から依頼された原稿の題材は，この平川先生のレポート問題と無関係ではないと思っている．遠隔相互作用としての万有引力の法則やクーロンの法則を，近接作用論の立場に転換させるためには**場**という概念を持ち込まなければならない．逆2乗法則という同形の力の法則を場の法則に還元する際，重力場と電磁場とではどのような類似点，相違点があるのか，以下改めて考えてみたい．

2. 逆2乗法則

万有引力の法則はあまりにも有名なので，ほとんど説明の必要がないだろう．質量が m_1, m_2 の2つの質点が距離 r だけ離れているとき，それらの間に働く力の大きさが

$$G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad (1)$$

になるというのがこの法則の内容である．ここで $G = 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,sec^{-2}}$ は重力定数である．この法則は中学生にも馴染み深い．

高校生になると電気的な力の法則，クーロンの法則を学ぶ．電荷が q_1, q_2 の2つの物体が距離 r だけ離れているとき，これらの間には

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad (2)$$

という大きさの引力または斥力が働くという．ここで ε_0 は真空の誘電率と呼ばれ，$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$ という値の定数である．

クーロンの法則 (2) も大変に有名な法則ではあ

るが，(1) と (2) の両方を学んだならば，恐らく多くの人々が直ちに同じ疑問を感じるに違いない．重力と電気力は全く関係がないと思われるのに，両者とも逆 2 乗法則になるのはいったいなぜなのか，という疑問である．それは偶然の一致なのか，それとも何か必然性があるのか？ そしてまた，逆 2 乗法則は本当に正確に「逆 2 乗」なのか？

例えばクーロンの法則を

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^{2+\beta}}$$

と書いたとき，$\beta = 0.000000\cdots$ というふうに，どこまでもゼロが並ぶのかどうか．もしも β が正確にゼロであるならば，そこには何か説明があってしかるべきだ．マクスウェルの有名な本[1)]に載っている $|\beta|$ の実験的上限は

$$|\beta| < \frac{1}{21600} \tag{3}$$

というものである．クーロンに先駆けてキャベンデイシュがクーロンの法則を導く精度の良い実験を行っていたのだが，それを知ったマクスウェルがキャベンデイシュと同じタイプの実験を再度行って得た制限が (3) であった．もっと近代的な実験[2)]によれば

$$\beta = (2.7 \pm 3.1) \times 10^{-16}$$

という結果が得られている．クーロンの法則は極めて高精度で成立していると言える．

万有引力の法則 (1) もいろいろなやり方でその適用範囲の検証が行われている．しばしば採用される方法は，ポテンシャル・エネルギーとして，逆 2 乗法則と湯川型のものを重ね合わせた

$$-\frac{Gm_1m_2}{r}\left(1+\alpha e^{-r/\lambda}\right) \tag{4}$$

という形を仮定し，いろいろな λ の値を仮定して α の値に制限をつけるというものである．図 1 は λ が 10^{-2} m から 10^{-6} m 程度の場合について，α に対する制限を図示したものである．

$\lambda \approx 10^{11}$ m 程度の場合には，水星，金星，火星，木星との距離をレーダーを用いて高精度で測定し，そのデータと軌道運動の通常の天文学的データを付き合わせて解析することにより，α に対して極めて厳しい条件が付けられる．$\lambda \approx 10^9$ m の場合でもアポロ 11 号が月面に設置した反射板を用いて月との距離を正確に測定し，それと月の運動のデータから，やはり α に対して極めて厳しい条件が付けられる．ところが図 1 を見て分かるように，$\lambda \approx 10^{-5}$ m 程度の近距離では，万有引力の法則の検証は意外に精度が不足しており，このことが近年，素粒子物理学者が大いに想像を逞しくする理由の 1 つになっている．しかし本稿ではその方面の進展には立ち入らずに，万有引力の法則 (1) がまずまずの精度で成り立っているとしておこう．

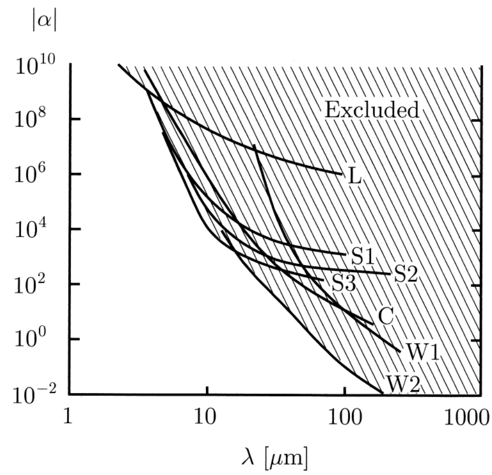


図 1 重力のポテンシャルを (4) のように仮定した場合の λ と α に対する実験的制限．各曲線の上側の斜線部分が実験的に排除されている．各曲線は，(C) U. Colorado, (W1, W2) U. Washington, (S1,S2,S3) Stanford, (L) Lamoreaux の各実験グループが得たものである（文献 3) の図を一部改編）．

3. 光源の強さと光度

科学の本質を平易に説明する能力に長けていたファラデーは，逆 2 乗法則を直感的に次のような例を用いて説明している[4)]．図 2 では，光源から距離 $2L$ の位置に衝立が置かれている．衝立の位置に正方形の板 A を置けば，それによって遮られる面積は正方形 A の面積そのものである．ところ

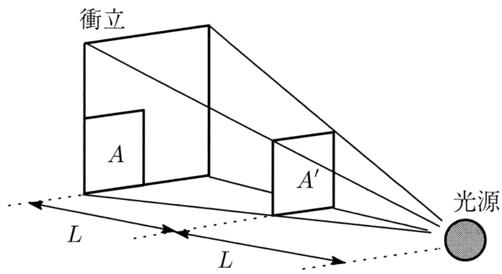


図 2　ファラデーによる逆 2 乗法則の説明[4)].

が A と同じ面積の板 A' を，光源から距離 L の位置に平行に置いた場合は，衝立の位置で遮られる面積は A' の 4 倍になる．このことから正方形 A' の受けている光の量は，正方形 A の受けている光の量の 4 倍であると結論できる．光源から受ける単位面積当たりの光の量，光度は，光源からの距離 r の 2 乗に反比例するというわけだ．直感的に

$$(\text{光度}) = \text{定数} \times \frac{(\text{光源の強さ})}{r^2} \tag{5}$$

という公式が正しそうに思われる．

ファラデーの説明には見逃してはならない考え方が潜んでいる．それは正方形 A' が受け取る光の量は，A' がない場合に衝立上の 4 倍の面積が受け取る光の量と同じであるという事実である．ファラデーは「光の流れ」あるいは「光の束」のような概念を頭の中で描いている．任意の大きさの領域に入ってきた光は，その領域内に光源がなければ減少したり増大したりせずに，必ず同じ量だけ外に流れていく．ここで「任意の大きさの領域」という言葉を用いたことに注意していただきたい．(5) のような逆 2 乗法則は大局的な性質に見えるが，任意の大きさの領域で成り立つ法則を見つければ，それは局所的な性質に移行できるのである．

4. 大局的性質と局所的性質

ファラデーが頭の中に描いた「光の流れ」は，電気現象の場合には電気力線の流れの束，**電束密度**という場，$\vec{D}$ に相当している．任意の領域 R の中に入った電束がすべて外に出て行くという状況を式に書くと

$$\int_{\partial R} d\vec{S}\cdot\vec{D} = 0 \tag{6}$$

となる．ここで ∂R は領域 R の境界を意味し，$d\vec{S}$ は境界の微小な面積要素に垂直なベクトルを意味する．もしこの領域 R の中に電荷密度 ρ が分布していれば，電気力線が湧き出すので，(6) は

$$\int_{\partial R} d\vec{S}\cdot\vec{D} = \int_R dV\,\rho \tag{7}$$

のように修正される．dV は微小な体積要素を意味する．(6), (7) は領域 R 全体での積分に関わる性質なので，いわば大局的な法則と言える．

ここで**ガウスの定理**

$$\int_{\partial R} d\vec{S}\cdot\vec{D} = \int_R dV\,\mathrm{div}\,\vec{D} \tag{8}$$

に注意しよう．この式は任意の領域 R に対して成り立つ．(7) と (8) が任意の領域 R で一致するためには，空間の各点において

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$$

が成り立たなければならない．これは微分型あるいは局所的な法則ということになる．

電束密度とスカラー・ポテンシャル ϕ は $\vec{D} = -\varepsilon_0 \mathrm{grad}\,\phi$ という関係で結ばれているので

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = -\varepsilon_0 \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,\phi) = -\varepsilon_0 \nabla^2\phi = \rho$$

という方程式を得る．∇^2 はラプラス演算子という．最後の等式は，電荷密度が与えられたときにスカラー・ポテンシャル ϕ を求めるための偏微分方程式になっていて，一般解は

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\vec{x}'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}'-\vec{x}|}$$

となる．これはクーロン・ポテンシャルの重ね合わせの形になっていて，クーロン力としては逆 2 乗法則を与えることになる．以上がファラデーが図形で直感的に把握した逆 2 乗法則を，電磁気学の場合について，数式を用いて定式化したものとなっている．

5. 重力場の方程式から万有引力の法則へ

それでは重力の場合に逆 2 乗法則がどのように理解されるかを述べてみよう．電磁気学の法則は，電荷密度 ρ と電流密度 $\vec{j}$ が，スカラー・ポテンシャル ϕ ならびにベクトル・ポテンシャル $\vec{A}$ という場を決定する形になっている．$(\rho, \vec{j})$, $(\phi, \vec{A})$ はミンコフスキー空間での 4 元ベクトルを構成している．

これに対して一般相対論では，物質が時空の曲がり具合を決定し，その曲がり具合によって重力が生じる．時空の曲がり具合を特徴づける量は計量と呼ばれる 10 個の量で，$g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$ という対称テンソルである．そして時空の曲がり具合を決めるのが**重力場の方程式**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{9}$$

であり，この式の右辺は物質のエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ ということになる．ここで $R_{\mu\nu}$ はリッチ・テンソル，R はスカラー曲率で，いずれも計量テンソル $g_{\mu\nu}$ から構成される．c は光速である．(9) が電磁場の方程式と異なる点は，(9) が計量テンソルについて非線形方程式であるという点である．

質点の運動方程式は，**測地線の方程式**

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0 \tag{10}$$

そのものである．ここで $\Gamma^\mu_{\lambda\rho}$ はクリストッフェルの三指標記号と呼ばれる．τ は測地線をパラメータ表示する変数で，例えば質点の固有時とすればよい．

弱い重力場中の質点の運動を調べよう．質点の速度が十分に遅く，固有時が座標時刻 t とほぼ等しいとする．即ち $\tau \approx t$ と置けば，(10) のうちの $\mu = i = 1, 2, 3$ の方程式は

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \approx -\Gamma^i_{00} \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} = -c^2 \Gamma^i_{00} \approx \frac{c^2}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}$$

と近似される．従って g_{00} を

$$g_{00} = -1 - \frac{2}{c^2} \Phi$$

と表せば，Φ がニュートンの重力ポテンシャルに相当していることが分かる．

Φ に対する方程式は (9) から導かれる．$\vec{x}_0$ という位置に質量 m の質点が静止している場合，物質のエネルギー・運動量テンソルのうちゼロでない成分は $T^0{}_0(\vec{x}) = mc^2 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ のみであり，(9) の方程式の $\mu = 0, \nu = 0$ の成分は

$$\nabla^2 \Phi(\vec{x}) = 4\pi G m \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

となる．これはクーロンの法則を与える方程式と同じ形であり，逆 2 乗法則を与える．同じ逆 2 乗法則を与えるといっても，もとになっている基礎方程式は全く異なる．それは重力ポテンシャルを計量テンソルの一部と同定したことに由来している．

6. 重力場のエネルギー，運動量

第 4 節では電気力線の流れの束と，電荷密度という湧き出しとの釣り合いを議論した．同様のことを重力の場合に考察しよう．重力の場合はエネルギー・運動量の保存則を調べることになる．

重力場の方程式 (9) の右辺の $T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルであり，(9) の左辺の形から

$$\nabla_\mu T^{\lambda\mu} = 0$$

となることが示せる．この式の微分は共変微分であることから，物質のエネルギー・運動量だけでは保存則が成り立たないことが分かる．保存則が成り立つためには重力場のエネルギー・運動量を表す量 $t^{\lambda\mu}$ が定義され，

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ (-g)(T^{\lambda\mu} + t^{\lambda\mu}) \right\} = 0 \tag{11}$$

という関係式を満たす必要がある．

$t^{\lambda\mu}$ の導入の方法にはいくつかの流儀があるのだが，以下ではランダウ・リフシッツの方法[5)] を説明しよう．基本となるのは，物質場と重力場のエネルギー・運動量の和を

$$(-g) \left(T^{\lambda\mu} + t^{\lambda\mu} \right) = \frac{\partial h^{\lambda\mu\nu}}{\partial x^\nu} \tag{12}$$

という形に書くことにある．ここで $h^{\lambda\mu\nu}$ は，

$$h^{\lambda\mu\nu}=\frac{\partial\Lambda^{\lambda\mu\nu\rho}}{\partial x^\rho},$$
$$\Lambda^{\lambda\mu\nu\rho}=\frac{c^4}{16\pi G}(-g)\left(g^{\lambda\mu}g^{\nu\rho}-g^{\lambda\nu}g^{\mu\rho}\right)$$

によって定義されている．あるいは $t^{\lambda\mu}$ は，(12) の中の $T^{\lambda\mu}$ を (9) の左辺で置き換えた式によって定義されていると言っても良い．この定義から分かるように，$t^{\lambda\mu}$ は通常のテンソルとしては振る舞わず，**エネルギー・運動量擬テンソル**と呼ばれる．$h^{\lambda\mu\nu}=-h^{\lambda\nu\mu}$ という性質により (11) は自明に成り立つ．

保存されるエネルギー，運動量も通常の手続きにより，

$$P^\lambda=\int(-g)\left(T^{\lambda 0}+t^{\lambda 0}\right)dV=\int\frac{\partial^2\Lambda^{\lambda 0\nu\rho}}{\partial x^\nu\partial x^\rho}dV$$

によって定義される．この積分は，時刻を一定にした3次元空間上で行う．この式で ν についての和は空間部分 $\nu\to k=1,2,3$ に限ってよい．なぜならば $\Lambda^{\lambda\mu\nu\rho}=-\Lambda^{\lambda\nu\mu\rho}$ という性質があるからだ．すると3次元空間の積分に対してガウスの定理が適用できて

$$P^\lambda=\sum_{k=1}^{3}\int\frac{\partial^2\Lambda^{\lambda 0k\rho}}{\partial x^k\partial x^\rho}dV=\sum_{k=1}^{3}\int_\Sigma\frac{\partial\Lambda^{\lambda 0k\rho}}{\partial x^\rho}dS_k$$

という公式を得る．ここで dS_k は k 軸方向に垂直な2次元微小面積要素である．積分は考えている領域の境界 Σ の上で行われる．電磁気学の場合，系全体の電荷は電荷密度の3次元空間上の積分で与えられる．通常の場の理論では，保存量が対応する密度の3次元積分であるのと相違して，重力理論ではエネルギー，運動量が2次元積分で書かれるのだ．例えば質量が M のシュヴァルツシルド解の場合には $P^0=Mc^2$, $P^i=0$ $(i=1,2,3)$ となることが確認できる．

7. 光子のキャッチボール

大局的な力の法則を局所的な法則に還元することができると，次の段階としては，力の法則をさらに精緻なものに仕上げていくことが可能になる．電磁気学でのクーロンの法則は，荷電粒子が静止している場合に働く力である．荷電粒子が速さ v で運動していれば v/c について，高次の補正が現れる．このような補正はミクロの世界の探求では特に重要であり，場を量子化したやり方で計算される．

場の量子論の手法では，クーロンの法則は，荷電粒子の間に光子がキャッチボールされることによって生じるのだが，荷電粒子が例えばディラック方程式に従うとするならば，比較的容易に v/c の補正が計算できる．質量が m_1, m_2，電荷が e_1, e_2，スピンが $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$ のディラック粒子の間に働くポテンシャル・エネルギーは**ブライト・フェルミ相互作用**と呼ばれ，次のようになる[6]．

$$\begin{aligned}U=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[&\frac{1}{r}-\frac{1}{2m_1m_2c^2}\frac{(\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2)}{r}\\&+\frac{1}{2m_1^2c^2}\frac{\vec{p}_1\cdot(\vec{r}\times\vec{S}_1)}{r^3}-\frac{1}{2m_2^2c^2}\frac{\vec{p}_2\cdot(\vec{r}\times\vec{S}_2)}{r^3}\\&+\frac{1}{m_1m_2c^2}\left\{\frac{\vec{p}_1\cdot(\vec{r}\times\vec{S}_2)}{r^3}-\frac{\vec{p}_2\cdot(\vec{r}\times\vec{S}_1)}{r^3}\right\}\\&+\frac{1}{m_1m_2c^2}\left\{\frac{(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2)}{r^3}-\frac{3(\vec{S}_1\cdot\vec{r})(\vec{S}_2\cdot\vec{r})}{r^5}\right\}\\&-\frac{1}{2m_1m_2c^2}\frac{(\vec{p}_1\cdot\vec{r})(\vec{p}_2\cdot\vec{r})}{r^3}\Bigg],\ \vec{r}\neq 0.\end{aligned}\quad(13)$$

ここで $r=|\vec{r}|, \vec{r}=\vec{x}_1-\vec{x}_2$, であり，$\vec{x}_1, \vec{x}_2$ は2つの荷電粒子の位置ベクトル，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ は運動量ベクトルである．

正確には，$\vec{r}=0$ で発散するデルタ関数型のポテンシャルも存在するのだが，(13) ではそれらを省略している．(13) の2行目，3行目の項は，**スピン・軌道相互作用**である．磁気能率が $\vec{m}_1, \vec{m}_2$ の2つの磁石が $\vec{r}$ だけ離れて置かれているとき，両者の間には

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{(\vec{m}_1\cdot\vec{m}_2)}{r^3}-\frac{3(\vec{m}_1\cdot\vec{r})(\vec{m}_2\cdot\vec{r})}{r^5}\right\}\quad(14)$$

$(\mu_0=4\pi\times10^{-7})$ というエネルギーが生じることを古典電磁気学で学ぶが，(13) の最後から2番目の項はまさにこの形であり，**スピン・スピン相互作用**を表す．

8. 重力理論における v/c の高次補正

一般相対論においても v/c の高次補正を調べることは，アインシュタインたち[7]以来，いろいろな角度から調べられてきた．そのような補正を取り入れることを**ポスト・ニュートン近似**と呼び，多粒子系についてラグランジュ関数で書き表すならば

$$L_{\mathrm{PN}} = \frac{G}{2}\sum_{a\neq b}\frac{m_a m_b}{r_{ab}}\left[1+\frac{3}{2c^2}\left(\vec{v}_a^{\,2}+\vec{v}_b^{\,2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{7}{2c^2}(\vec{v}_a\cdot\vec{v}_b)-\frac{1}{2c^2}(\vec{n}_{ab}\cdot\vec{v}_a)(\vec{n}_{ab}\cdot\vec{v}_b)\right]$$
$$-\frac{G^2}{2c^2}\sum_{b\neq a\neq c}\frac{m_a m_b m_c}{r_{ab}r_{ac}}$$

というものになる．$m_a, \vec{v}_a$ はそれぞれ，a 番目の粒子の質量，速度ベクトルを意味する．a 番目の粒子の位置ベクトルを $\vec{x}_a$ とするならば，$r_{ab}=|\vec{x}_a-\vec{x}_b|$ であり，$\vec{n}_{ab}=(\vec{x}_a-\vec{x}_b)/|\vec{x}_a-\vec{x}_b|$ という記号を用いている．

粒子がスピンを持っている場合，スピン・軌道相互作用やスピン・スピン相互作用が次のような形で現れる：

$$L_{\mathrm{SO}} = \frac{G}{c^2}\sum_{a\neq b}\frac{1}{{r_{ab}}^2}\left\{\right.$$
$$\frac{3}{4}m_a\vec{n}_{ab}\cdot(\vec{v}_b\times\vec{S}_b)-\frac{3}{4}m_b\vec{n}_{ab}\cdot(\vec{v}_a\times\vec{S}_a)$$
$$\left.-m_a\vec{n}_{ab}\cdot(\vec{v}_a\times\vec{S}_b)+m_b\vec{n}_{ab}\cdot(\vec{v}_b\times\vec{S}_a)\right\},$$
$$L_{\mathrm{SS}} = \frac{G}{2c^2}\sum_{a\neq b}\frac{1}{{r_{ab}}^3}\left\{\right.$$
$$\left.(\vec{S}_a\cdot\vec{S}_b)-3(\vec{S}_a\cdot\vec{n}_{ab})(\vec{S}_b\cdot\vec{n}_{ab})\right\}.$$

ここで a 番目の粒子のスピンを $\vec{S}_a$ としている．L_{SS} も (14) と同じ形をしていることに注意しよう．スピンという言葉を用いたが，ここでの議論はすべて古典論である．

9. Gravity Probe B

前節で述べたスピン・軌道，ならびにスピン・スピン相互作用は，ニュートン力学では予想できなかった新しい現象を予言する．地球の周りを周回する人工衛星にジャイロスコープを搭載した場合，ジャイロスコープは**測地的効果**ならびに**引きずり効果**という 2 種類の相対論的な歳差運動を起こす[8]．ジャイロスコープの自転角運動量を $\vec{S}$，地球の自転角運動量を $\vec{J}$，ジャイロスコープの地球中心からの距離を r，位置ベクトルを $\vec{r}$，地球に対する速度を $\vec{u}$ とするならば，歳差運動は

$$\frac{d\vec{S}}{dt}=\vec{\Omega}\times\vec{S},$$
$$\Omega=\frac{3GM}{2c^2r^3}(\vec{r}\times\vec{u})+\frac{G}{c^2}\left\{\frac{3\vec{r}(\vec{J}\cdot\vec{r})}{r^5}-\frac{\vec{J}}{r^3}\right\}$$

によって記述される．Ω の右辺第 1 項が測地的効果，第 2 項が引きずり効果と呼ばれる．M は地球の質量である．実はこの一般相対論的効果も，かつての平川先生の講義の中で取り上げられていた．

この現象を調べる実験は，1964 年頃からスタンフォード大学で準備が始められ，つい最近になって成果が発表された．Gravity Probe B[9]と呼ばれる実験がそれである．2004 年 4 月 20 日に打ち上げられた人工衛星に搭載された Gravity Probe B の実験装置は，完全な球形をしたピンポン玉の大きさの 4 つのジャイロスコープからなる．2004 年 8 月 28 日から翌年の 8 月 14 日までデータが集積された．図 3 は実験の概略であり，IM Pegasi と記された星を基準にして歳差を測定する．4 つのジャイロスコープについての実験結果は表 1 に

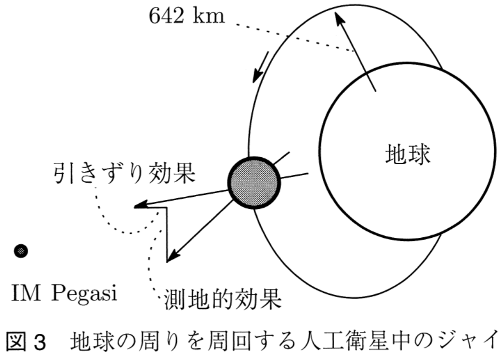


図 3 地球の周りを周回する人工衛星中のジャイロスコープの歳差運動（文献 9) の図を一部改編）．

表1　4つのジャイロスコープによる実験結果[9]．"mas/yr" は miliiarcsecond/year を意味する．1 mas=4.848 $\times 10^{-9}$ rad.

Source	r_{NS} (mas/yr)	r_{WE} (mas/yr)
Gyro 1	-6588.6 ± 31.7	-41.3 ± 24.6
Gyro 2	-6707.0 ± 64.1	-16.1 ± 29.7
Gyro 3	-6610.5 ± 43.2	-25.0 ± 12.1
Gyro 4	-6588.7 ± 33.2	-49.3 ± 11.4
Joint	-6601.8 ± 18.3	-37.2 ± 7.2
GR	-6606.1	-39.2

まとめてある．一般相対論による予言は「GR」という欄にある通りで，測地的効果（r_{NS}）については実験と理論は0.3パーセントの誤差の範囲内で一致している．引きずり効果（r_{WE}）については，当初の期待通りの精度とは言えないが，20パーセントの誤差の範囲内で一般相対論の予言を確認している．

精度が必ずしも上がらなかったのは，ジャイロスコープとそれを収納しているケースの上に分布する寄生静電荷に原因があった．この電荷分布を理解し，モデルを用いて補正を行った結果，誤差が大きめになってしまった．とはいえ，およそ50年にも及ぶ関係者の努力には大いに敬意を表したい．

10. エピローグ

ゲージ理論の研究が盛んなりし頃，1970年代半ば頃の素粒子論研究者は次々に現れる新粒子の分析に忙しく，一般相対論に関わる余裕はほとんどなかった．ところが素粒子の標準理論が確立した1980年頃から，初期宇宙論や超弦理論の研究を通じて，一般相対論と素粒子論の関係は実に密接になってきた．宇宙背景輻射の観測データの精度が驚異的に上がり，最近ではBモードと呼ばれる偏極のデータ解析も公表され始めている．本稿が印刷，出版される頃にはPLANCK衛星によるBモード観測の解析も公表されているはずである．量子重力研究もいよいよ現実的なものになってきた感がある．

冒頭に述べた平川先生のレポート問題1に対しても，現在ならば全く異なる解答が考えられるかも知れない．超弦理論の研究を進めるうちに，ゲージ理論と重力理論との間には不可思議な対応関係が潜んでいることが分かってきている．そのことを考慮するならばレポート問題1で期待されている解答と正反対のことも考えてみたくなるのだが，それはここでは控えておこう．

ところで40年前に平川先生が我々学生に課したもう1つのレポート問題は次のものであった．

> **レポート問題2**　質量 M，半径 R，慣性能率 I を持つ球形の中性子星の表面近くを，円形の軌道を描きながら回る人工衛星の周期を求めよ．次にこの中性子星が角速度 Ω で自転しているとき，自転の影響が人工衛星の軌道にどのように現れるか考察せよ．自転によって中性子星の球状，密度分布が変化することに基づく効果は無視できるものとする．

この問題に答えるために，物理教室図書室の書庫に行ってレンズーティリングの古めかしいドイツ語の論文を読んだことを記憶している．本稿を最後まで読んで下さった読者は是非ともこの問題も考えていただきたい．

本原稿をお読み下さり，貴重なご意見を下さった佐々木隆氏に厚くお礼を申し上げたい．

参考文献

1) J.C. Maxwell, "*A Treatise on Electricity and Magnetism*" (Clarendon Press, 1891).
2) E. Williams, J.E. Faller and H.A. Hill, *Physical Review Letters* **26**, 721 (1971).
3) A.A. Geraci *et al.*, *Physical Review D* **78**, 022002 (2008).
4) ファラデー『力と物質』(稲沼瑞穂訳, 岩波文庫, 1949).
5) ランダウ・リフシッツ理論物理学教程『場の古典論 原書第6版』(東京図書, 1978年).
6) ランダウ・リフシッツ理論物理学教程『相対論的量子力学1, 2』(東京図書, 1969年).
7) A. Einstein, L. Infeld and B. Hoffman, *Ann. Math.* **39**, 66 (1938).
8) L.I. Schiff, *Physical Review Letters* **4**, (1960) 215.
9) C.W.F. Everitt *et al.*, *Physical Review Letters* **106**, 221101 (2011).

（くぼた・たかひろ，大阪大学全学教育推進機構，大阪大学大学院理学研究科）

量子力学に現れる非局所性の意味



木 村　元

1. はじめに

少し思い出話から始めよう．高校のとき，初めて物理学を真剣に学び，この世界を理解する奇跡ともいえる術に心酔し，迷わずこの学問を専攻することにした．しかし，ニュートン力学や電磁気学などの基礎に精通するにつれ，次第に「物理学の対象や法則の相違はあるにせよ，根底にある基礎方程式に立ち戻れば，原理的な困難はもはや存在しない」といった若者にありがちな虚無的な驕りと誤想をいだき始めていた．これを根底から打ち砕いたのは，量子力学との出会いであった．

量子力学は，原子や素粒子などの微視的世界の基礎理論である．しかし，それが語る世界の在り方は，それまで学んだあらゆる物理学と異なっていた．原子核の周りを回る電子は，太陽の周りを回る惑星の姿とはほど遠く，むしろ雲のように原子核にまとわりついている．かといって，それは電磁場のような実体のある波ではなく，電子の位置を観測をすると雲のどこか一点に粒子として現れる―それは波動関数と呼ばれる抽象的な複素関数であり，電子が「観測されたときに」何が起こるかを予想するための理論的道具に過ぎないのである．

当然，観測をしていないときに電子がどのように運動しているのかが気になった．ところが量子力学はそのようなことは一切語らず，むしろ，実在的な考え方，すなわち，観測をしていないときのことを語ることは邪道であるとさえ教えられた．量子力学は「観測をすると何が起こるか？」を的確に答えるようにできているため，実際上「観測をしていないときのこと」に答える必要はない．それでも量子力学は完全な理論であるとされている．

本当にそうなのだろうか？ さらに追求すべき実体が隠されているのではないか？

このような思いで量子力学に向き合い，果たしてボーム[1]やネルソン[2]の量子化といった，実際に軌跡の定義できる定式化も知ることになった．また，アインシュタインらのEPRの議論[3]にも後押しされ，ますますその思いを強くした頃にベルの定理[4]に出くわした．

結論から述べよう．量子力学を―ひるがえってこの世界を―局所実在的に理解することはできない．言い換えると，量子力学に何かしら実在的な考え方（例えば，見ていないときにも電子の位置があるなど）をしてしまうと，その実在には奇妙な非局所性が現れる：遠くに離れた実体たちは，どれだけ離れていても瞬時に影響を及ぼし合う―このような非局所性は，相対性理論に反するばかりか，局所的な存在である人類が自然を理解する可能性を奪いかねないほどの破壊力を持つ．

この事実を知ったときは，身もだえもするような衝撃を感じたことを覚えている．この世界の不思議さの一端を垣間見たことに加え，「人類は未だこの世界の“在り方”を理解できていないのでは」という予感に対する武者震いでもあった．

本稿の目的は，できるだけ量子力学の知識を仮定せずに，読者と共にこの思いを共有することにある*1)．

2. 科学は実在を語るべきか？

「月は，今見ていなくても，いつもの場所にあるか？」唐突にこのような質問をされたら「ある」と答える人がほとんどだろう．しかし「それを証明できるか？」と言われたらどうだろう？ しかも「いかなる観測も行っていないとき」という条件をつけられたら．

驚くかもしれないが，これを科学的な方法で証明することはできない—例えば，極論を言うと「見た瞬間に月が現れる」などの可能性を排除できない．観測をしていないときのことは，実証を重んじる科学に答えることはできないのだ．

これは，紀元前の哲学の話ではない．20 世紀に入り，原子などの小さな世界の法則をめぐって，物理学者たちの間で真剣に論議された問題である．事実，微視的世界を記述する量子力学は，観測をしていないときのことは一切語らない．その代わりに，電子などの位置，運動量，エネルギーといった物理量を観測したら，どのような測定値をどのような**確率**で得るかを答えるようにできている．観測をしていないときのことには触れていなくても，量子力学は科学として完成された理論であるとされている．

これには，アインシュタインを筆頭に，多くの物理学者たちが反論した．観測をしていないときでも，原子は客観的な性質を備えているはずで，量子力学がそれを語らないのは，まだ理論が不完全であるからだと考えた．

しかし冒頭にも述べたように「観測をしていない」ときのことを語ることは容易ではない．特に「語る必要がない」とする者たちに「実在」があることを説得するには，一筋縄でない工夫が必要なのである．

*1) 興味を持った読者は文献 5) の一読をお勧めする．

3. EPR の議論

そこで，アインシュタインら（以下，文献 3) の著者たちの頭文字を取って EPR）は頭をひねり，「実在がある」とごく自然に考えてしまう状況を考えた．たとえ話で説明しよう．今，互いに遠くにいる観測者 A と B がいて，その中間地点で 2 つのボールを発生する装置がある（図 1）．装置のボタンを押すと A と B に一つずつボールが飛んでいく．A と B は飛んできたボールの色を観測する．何度か実験を繰り返すと，次のような状況が確認された．ボールの色は，ランダムに赤か緑が観測される．しかし，後に A と B で確認し合ったところ，A が赤色（または緑色）を観測したときは，B は必ず緑色（または赤色）を観測していた（これを，A と B のボールの色が完全（反）相関するという）．この現象を利用すると，A がボールの色を確認した瞬間に，どんなに遠くにいる B に対しても，そのボールの色が瞬時にわかってしまうことになる．**これは不思議な現象だろうか？**

少し考えれば，これは特段不思議ではないと思うだろう．「中間地点で，あらかじめ赤と緑のボールを一つずつ準備して，それを適当に A と B に投げている」と考えれば簡単に説明がつく．たとえ A と B がどんなに離れていようが，A の色が赤ならば，B の色は当然緑になるだろう．

しかし，ここに EPR の狙いがあった．この説明では—A と B が観測する前から—ボールの色が決まっている，すなわち，ボールの色の実在値を考えている．もし色の実在値を考えなければ，A の観測行為が，遠くにいる B のボールに非局所的に影響を与えることになってしまう．アインシュ

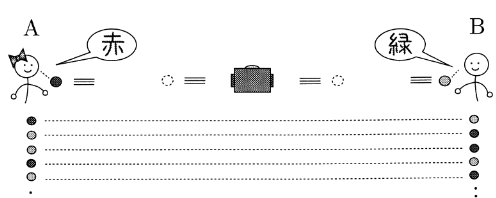


図 1 色の完全（反）相関．

タインは，これを「気味の悪い相互作用（spooky action）」と揶揄し，それが生じないためにも「実在的に考えるべきである」と主張したのである．

何を当り前のことを小難しく述べているのだろう？ 古典物理学のように，原子だって位置や運動量などの実在値を持っていると考えればよいではないか？―そう思った読者は，このまま次節に飛んでもらっても構わない．量子力学をそう単純に理解できないのには理由があるのだ．

以下では，EPR の議論をより正確に説明しておきたい．まずはじめに，EPR は**実在の要素**を次のように定義した：「物理系を乱すことなく，確実に（確率 1 で）測定値が予言できるとき，対応する実在の要素が存在する」．

これは実在の十分条件である．単に，確実に予言できるというだけでなく，物理的擾乱を排除することによって，観測行為が測定値を作り出す可能性も避けている．EPR は慎重に「これさえ満たせばさすがに実在があると言えるだろう」という条件を考えたのである．

上述したボールの例でいうと，B 系のボールの色は「実在の要素」になる．なぜならば，B 系のボールの色は，A 系のボールを観測することにより，確実に予言できる．しかも，局所性を要請すると*2)，A 系の観測行為は遠くの B 系を物理的に乱すことがないからである．

しかし，この段階では量子力学の不備を指摘したことにはならない．量子力学においても，一つの物理量に限れば，確実に測定値を予言できる状態（固有状態）が存在するからだ．EPR が攻撃したのは，量子力学の「不確定性原理」である．不確定性原理によると，一般に複数の物理量（粒子の「位置」と「運動量」など）が“同時に”確定的な値を持つ状態は存在しない．

EPR は，2 つの量子力学的粒子（A と B）を考え，それらの位置が完全相関するだけでなく，運動量も完全相関するような量子状態（波動関数）を考え出した（このこと自体は不確定性原理に反しない）．つまり，A の位置を測定すれば，B の位置が確実にわかるだけでなく，A の運動量を測定すれば，B の運動量も確実にわかるような状態だ．

ところが，ボールの例で説明した EPR の論法に従えば，この状態において「粒子 B の位置も運動量も“同時に”実在の要素となる」と考えられる．これらの要素は不確定性原理に縛られた量子力学には含まれていないので，EPR は量子力学が不完全であると結論付けたのだ．

最後に EPR の議論を具体的な量子状態を用いて確認しておこう（ここでは量子力学の知識を仮定する）．EPR が考えた状態は，今では **EPR 状態**と呼ばれる量子状態の一例となっている．ただし，原論文[3)]のように，位置や運動量を直接扱うと，系 A と B が遠くに離れている条件が曖昧になってしまうため，ここでは後にボームが考えた，粒子の内部自由度を利用した改良版[6)]を見ておこう．

2 つの二準位系のスピン一重項状態（最大エンタングルド状態）

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle - |+-\rangle) \tag{1}$$

を考える*3)（ここで，$|0\rangle = (1,0), |1\rangle = (0,1), |\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$）．このような状態は，2 つの光子の偏光状態や 2 つの電子のスピン状態で実現される．この状態の下で，両系で物理量 σ_x の測定をすると，それぞれの系で測定値 ±1 を得る同時確率は，$\Pr(\sigma_x = \pm, \sigma_x = \mp|\psi) = |\langle\pm\mp|\psi\rangle|^2 = \frac{1}{2}$, $\Pr(\sigma_x = \pm, \sigma_x = \pm|\psi) = |\langle\pm\pm|\psi\rangle|^2 = 0$（複号同順）となる．つまり，片方の系の測定値が ±1 ならば，もう片方の系の測定値は確実に ∓1 である（完全相関）．同様にして，σ_z どうしの測定でも，両者は完全相関することが確認できる．したがって，EPR の論法によれば，σ_x も σ_z の値も“同時に”実在の要素となるが，不確定性原理によると σ_x と σ_z が同時に確定的な量子状態は存在しない．

*2) EPR の原論文で局所性は暗黙のうちに仮定されている．

*3) 二粒子の空間の自由度は，空間的に離れた領域にサポートを持つ波動関数を想定している．

4. ベルの定理

EPRの議論を推し進めたJ.S. ベルは，EPR状態を「実在性」と「局所性」を両立させる形で理解することはできないという驚くべき結論に達する[4)]．言い換えると，EPRが見出した量子状態は，いかなる形で実在を導入したとしても，そこから非局所性を追い出すことができないのである．その後，EPR状態は実験でも（間接的に）確認されたため[7)]，**この世界を局所実在的に理解することはできない**ことがわかっている．

本節では，ベルのたどり着いた結論をなるべく一般的な形で解説していきたい．特に，局所実在の仮定の意味を明らかにし，平易ではあるが，厳密な証明も紹介する．

まずはじめに，ベルは局所性と実在性を満たすあらゆる理論（**局所実在論**）で成立する条件式を導いた．さらに，EPR状態(1)が，この条件式を満たさないことを示した．これにより，この状態を「いかなる局所実在論」を用いても説明できないことがわかるのである．この一連の結果を**ベルの定理**と呼ぶ．

今ではこのような条件式は無数に知られているが，本稿では（恐らく最も有名で簡単な）CHSH不等式を紹介する[8)]．EPRの議論のように，遠く離れた観測者AとBを考え，やはり中間地点から2つの粒子がAとBに飛んでいくものとする（図2）．Aは測定 M または M' のどちらかをランダムに行い，Bも測定 N または N' のどちらかをランダムに行うことができる．ただし，すべての測定は，測定値が2つしかないものとして，その値を（適切な単位系を用いて）±1とする[*4)]．ベルはEPRの議論を超えて，局所実在を仮定した場合に測定の多重的な相関（下記(2)式など）が満たす普遍的な性質を明らかにした．以下，$\langle M,N\rangle$ などは測定 M,N の積の期待値を表す．

*4) ボールのたとえ話では，M と N を色の測定（その測定値は「赤」か「緑」の2つ），また，M' と N' を重さの測定（その測定値は「重い」か「軽い」の2つ）などとすればよい．量子系では，例えば電子のスピン測定や光子の偏光の測定で実現できる．

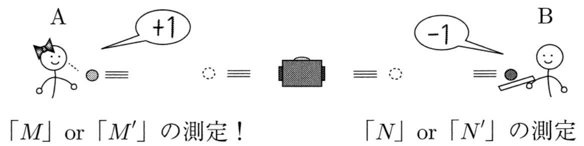


図2 複数の物理量の相関.

〈CHSHの不等式〉

あらゆる局所実在論において，

$$|\langle M,N\rangle+\langle M,N'\rangle+\langle M',N\rangle-\langle M',N'\rangle|\le 2 \quad (2)$$

が成り立つ[*5)]．

以下では幾分直観的な証明をしてから，局所実在論の詳細な説明を与える．

[証明] 実在性を仮定すると，観測する前から M,M',N,N' の測定値が**すべて**あらかじめ実在していたことになる．これらは（未知の要因によって）確率的に揺らいでいるが，これらの同時確率分布が存在すると考えられる．また，局所性を仮定することで，この確率分布はそれぞれの系で何を測定したかなどの文脈に依存しない．この同時確率分布を，

$$\Pr(M=m,M'=m',N=n,N'=n') \quad (3)$$

と記す（$m,m',n,n'=\pm1$）．ここで「期待値 = (測定値 × 確率) の全総和」であることを思い出すと，M と N の積の期待値は $\langle M,N\rangle := \sum_{m,n,m',n'=\pm1} mn\Pr(M=m,M'=m',N=n,N'=n')$．これを測定の全ペアに適用すると，CHSH不等式の左辺は

$$\left|\sum(mn+mn'+m'n-m'n')\Pr(m,m',n,n')\right| \quad (4)$$

となる（ただし，和は測定値 $m,n,m',n'=\pm1$ に渡って取り，同時確率分布(3)を $\Pr(m,m',n,n')$

*5) CHSH不等式の相関の形は，いかにも物理的意味がありそうであるが，筆者はその特別な意味を知らない．ただし，CHSH不等式のような二値二測定ペアの設定に限定すると，（各相関の符号を入れ替えたものを含めて）(2)の条件が，局所実在論で説明できるための必要十分条件になることが知られている[9)]．

と略した）．ここですべての測定値に対して $|mn + mn' + m'n - m'n'| = 2$ に注意する[*6)]と，三角不等式[*7)]と確率の正値性より，$(4) \le \sum |(mn + mn' + m'n - m'n')\mathrm{Pr}(m, m', n, n')| = 2\sum \mathrm{Pr}(m, m', n, n') = 2$ を得る（最後の等式では，全確率の和が 1 であることを用いた）．□

この証明は，平易ではあるが，局所実在の仮定がいささか不明瞭である．以下，より一般的な（確率的な）**局所隠れた変数**を説明するが，結果として，これは同時確率分布 (3) の存在を仮定することと等価になる．したがって，上記の証明も一般的で厳密であることに注意されたい．

隠れた変数 λ とは，量子力学の理論には含まれていない要素で，量子力学の確率を定める根源的な要因である（EPR が追求した実在の要素を含む）．隠れた変数 λ は（我々の無知や何かしらの未知な要因で）確率 $p(\lambda)$ で揺らいでいる．量子系において，測定 M をして測定値 m を得る確率 $\mathrm{Pr}(M = m)$ は，隠れた変数に渡って平均化することで得られる[*8)]：

$$\mathrm{Pr}(M = m) = \int d\lambda\, p(\lambda)\mathrm{Pr}(M = m|\lambda). \quad (5)$$

ここで，$\mathrm{Pr}(M = m|\lambda)$ は，隠れた変数 λ が決まったときの測定値 m を得る確率（条件付き確率）である．通常は，λ が固定されると，測定値 m は（確実に）決まると考え，$\mathrm{Pr}(M = m|\lambda)$ は 1 か 0 を取る．しかし，量子力学の理論に見つかっていないあらゆる可能性—隠れた変数が決まったとしても現象がランダムに起こる可能性—も想定して，$\mathrm{Pr}(M = m|\lambda)$ を一般的な確率分布とすることが多い（これを確率的隠れた変数と呼ぶ）．

EPR によると，このような隠れた変数（実在）があったとしても，それは局所的な性質を持つべきである．すなわち，遠くに離れた系 A と B における測定 M と N は，ひとたび隠れた変数 λ が決まると，統計的に独立（同時確率分布は積の確率分布）となるものと要請する：$\mathrm{Pr}(M = m, N = n|\lambda) = \mathrm{Pr}(M = m|\lambda)\mathrm{Pr}(N = n|\lambda)$．量子力学が予言する同時確率分布 $\mathrm{Pr}(M = m, N = n)$ は，これに λ の揺らぎを考慮して，

$$\int d\lambda\, p(\lambda)\mathrm{Pr}(M = m|\lambda)\mathrm{Pr}(N = n|\lambda) \quad (6)$$

で与えられる．このように，局所性を満たす隠れた変数を用いる理論を**局所実在論**と呼ぶ[*9)]．量子力学以外のあらゆる古典物理学は—隠れた変数（実在）が隠れていない（未知でない）ことを除けば—局所実在論であることに注意する．

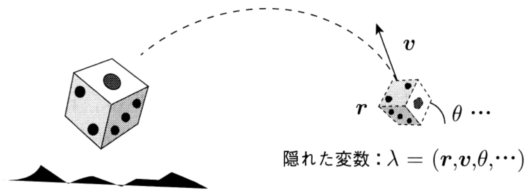


図 3　サイコロ投げの隠れた変数.

少し抽象的な説明が続いたので，隠れた変数を身近なサイコロ投げで説明しておこう（図 3）．通常のサイコロ投げの目の測定 M を考えると，目の値 $m = 1, \cdots, 6$ が出る確率はすべて $\mathrm{Pr}(M = m) = \frac{1}{6}$ である．ところが，サイコロ投げの軌跡がニュートン力学に従うとすると，結果が確率的に揺らぐのは「投げた瞬間の位置 $\boldsymbol{r}$，速度 $\boldsymbol{v}$，サイコロの角度 $\theta, \cdots$ など」を知らないからだ．これらがサイコロ投げの隠れた変数 $\lambda = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, \theta, \cdots)$ であり，λ さえ決まればサイコロの目が確実に決まると考えられる．より一般的には，λ が決まったとしても，床の凸凹具合などの理由で，なお結果は確率的にゆらぐ可能性もある．これが $\mathrm{Pr}(M = m|\lambda)$ である．ところが隠れた変数 λ は，人間の投げる癖などで確率 $p(\lambda)$ で揺らぐため，最終的にサイコロの目の確率が (5) を通じて決まるのである．さらに，遠くに投げられる 2 つのサイコロ（図 4）を考えると，隠れた変数 λ はそれぞれのサイコロの初期位置，速度，角度のペアで与えられる．隠れた変数 λ が与えられると，それぞれの目が出る

*6)　このことを確認せよ：例えば，$m = 1, m' = -1, n = 1, n' = -1$ の場合は，$mn + mn' + m'n - m'n' = 1 \times 1 + 1 \times -1 + -1 \times 1 - (-1 \times -1) = -2$.

*7)　$|a + b| \le |a| + |b|$．これより $|\sum_i f(i)| \le \sum_i |f(i)|$ に注意.

*8)　正確には条件付き確率の定義と確率の和法則を用いている.

*9)　局所実在性のより詳しい条件分析は文献 10) を参照せよ.

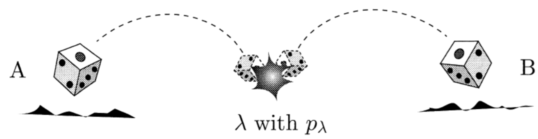


図4　2つのサイコロ投げの局所隠れた変数.

確率は，それぞれの場所の床の具合などで局所的に決まるが，局所性の要請から独立となる．これに，隠れた変数の確率 $p(\lambda)$ を考慮すると，最終的な同時確率分布は (6) で与えられる．

局所実在論は，量子力学に「局所性を満たす形で未知の実在を見出す」いかなる試みも含んでいる．ところが局所実在論は，CHSH が想定している測定 M, M', N, N' の確率に関しては，同時確率分布 (3) を仮定することと等価であることがわかる[9]．実際，局所実在論を仮定すると，同時確率分布 (3) を $\int_\lambda d\lambda\ p(\lambda)\mathrm{Pr}(M = m|\lambda)\mathrm{Pr}(M' = m'|\lambda)\mathrm{Pr}(N = n|\lambda)\mathrm{Pr}(N' = n'|\lambda)$ と導入することができる．逆に，同時確率分布 (3) を仮定すると，隠れた変数自身を測定値のペア（$\lambda = (m, m', n, n')$）に，また，その確率 $p(\lambda)$ を (3) と取ることができ，それぞれの局所確率を $\mathrm{Pr}(M = l|m, m', n, n') := \delta_{lm}$（$\delta_{lm}$ はクロネッカーのデルタ）などと置くことで，局所実在論を導入することができる．

最後に，EPR 状態 (1) が，適切に選ばれた量子測定によって CHSH 不等式 (2) を破ることを見ておこう（ここでは量子力学の知識を仮定する）．x-z 平面内の 2 つの単位方向ベクトル $\boldsymbol{m} = (m_x, m_z), \boldsymbol{n} = (n_x, n_z)$ に対し，二粒子のそれぞれの系で，$\boldsymbol{m}$ 方向パウリ行列 $\sigma_{\boldsymbol{m}} := m_x\sigma_x + m_z\sigma_z$ の測定 M および $\boldsymbol{n}$ 方向パウリ行列 $\sigma_{\boldsymbol{n}} := n_x\sigma_x + n_z\sigma_z$ の測定 N の同時測定を考える．量子力学の期待値の公式を用いると

$$\langle M, N\rangle = \langle\psi|\sigma_{\boldsymbol{m}} \otimes \sigma_{\boldsymbol{n}}\psi\rangle = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n} \quad (7)$$

を得る（$\otimes$ はテンソル積の記号）*10)．CHSH 不等式の測定 M, M', N, N' をそれぞれ $\boldsymbol{m} = (0,1)$, $\boldsymbol{m}' = (1,0)$, $\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\boldsymbol{n}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$ 方向のパウリ行列と取れば，(7) より $\langle M, N\rangle = \langle M, N'\rangle = \langle M', N\rangle = -\langle M', N'\rangle = -1/\sqrt{2}$ を得る．したがって (2) の左辺は $2\sqrt{2} \simeq 2.8$ となり，CHSH 不等式を破る*11)．

*10)　(1) および $\sigma_x|0\rangle = |1\rangle, \sigma_x|1\rangle = |0\rangle, \sigma_z|0\rangle = |0\rangle, \sigma_z|1\rangle = -|1\rangle$ を用いて確認せよ．

5. 量子力学は非局所的な理論なのか？

ベルの定理は，「局所性」と「実在性」を同時に取り込む形で量子力学を理解することができないことを意味する．そのため—しばしば喧伝されるように—量子力学が非局所的な理論であると断ずるのは言い過ぎであろう．事実，実在性を放棄すれば，量子力学の局所性を担保することができる．これにより，量子力学と相対性理論は平和的に共存できるのである．量子力学の“非局所性”を利用した「光速を超えた通信の可能性」といった誤解を生じさせないためにも，むしろ，量子力学は実証的な立場では立派な局所的な理論であることを認識することが重要であろう．

実証的な意味で局所的であることは，系 A へのいかなる操作を通じても，遠隔地にある系 B に瞬時に（あるいは光速を超えて）検出可能な物理的影響が伝わらないこととして定義できる．局所性の意味は広義にわたるため，これを**瞬間伝送禁止則**（No-Signalling 条件）と呼んで区別する．

以下，量子力学が瞬間伝送禁止則を満たすことを証明する（ここでも量子力学の知識を仮定する）．最も一般的な設定では，量子状態と測定はそれぞれ，密度行列 ρ*12) および POVM（positive operator valued measure）$M = (E_m)_m$*13) で与えられ，測定値 m を得る確率は $\mathrm{Pr}(M = m|\rho) = \mathrm{Tr}(E_m\rho)$ となる[12]．合成系 A+B が密度行列 ρ の状態にあり，系 A および系 B でそれぞれ局所的に POVM 測定 $M = (E_m)_m$ と $N = (F_n)_n$ をすると，測定値 m および n を得る確率は

$$\mathrm{Pr}(M = m, N = n|\rho) = \mathrm{Tr}(E_m \otimes F_n\rho) \quad (8)$$

*11)　$2\sqrt{2}$ は量子系における最大の破れである[11]．

*12)　$\mathrm{Tr}\,\rho = 1$ を満たす正値行列．ここで Tr は行列のトレース（対角成分の和）．正値行列 ρ とは，任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して，$\langle\psi|\rho\psi\rangle \geq 0$ を満たす行列のこと．

*13)　m は測定値のラベル，E_m は $\sum_m E_m = I$ を満たす正値行列の組．ここで I は単位行列である．

で与えられる．なお，系 A の測定値 m を知らない系 B にとっての確率分布は（確率の和法則より，測定値 m に渡って和を取った）周辺分布で与えられる：

$$\Pr(N=n|\rho):=\sum_m \Pr(M=m, N=n|\rho). \quad (9)$$

ここで，POVM 測定には（他の物理系と相互作用をさせてから物理量を測定するなど）可能な操作がすべて含まれていることに注意する[12]．したがって，瞬間伝送禁止則を「系 A の測定の選択が，系 B の周辺分布に影響を及ぼさないこと」と定義しても一般性は失われない．以上より量子力学が瞬間伝送禁止則を満たすは容易にわかる．実際，(8) を系 B の周辺分布 (9) に代入すると，

$$\Pr(N=n|\rho)=\sum_m \mathrm{Tr}(E_m\otimes F_n\rho)$$

$$=\mathrm{Tr}\left(\left(\sum_m E_m\right)\otimes F_n\rho\right)=\mathrm{Tr}(\mathbb{I}_A\otimes F_n\rho)$$

となり，系 B の周辺分布が系 A の測定 $M=(E_m)_m$ に依存していないことがわかる（式変形では，トレースとテンソル積の線形性および POVM の性質 $\sum_m E_m=\mathbb{I}_A$ を用いた）．

このように，観測にかかるレベルでの非局所性は量子力学には存在しないことに注意する．

6. 終わりに

本稿では，量子力学に現れる非局所性に関して，EPR の議論とベルの定理を中心に解説した．

アインシュタインたちは「局所性を救うために，実在の要素が存在するはずである」と推論し，EPR の議論はその方向への確かな手がかりとなると信じていた．皮肉にもベルは，どのような形で量子力学に実在を導入しても，非局所性を追い出すことはできないという驚愕の事実にたどり着いた．EPR 状態を見出したアインシュタインたちは，ある意味でパンドラの箱を開けてしまったのである*14)．

我々はベルの定理から何を学ぶのであろうか．前節で示したように，実証レベルにおける非局所性は量子力学にも現れない．この世界を理解するために，実在的な方法論を放棄しなければならないのか？ あるいは，「気味の悪い相互作用」を乗り越えてもなお，人類が“世界の在り方”を正しく理解できる道が残されているのか？ その答えは未だ誰にもわかっていない．ベルの定理は「科学の最も深遠な発見」と評され[13]，今でも世界の認識方法の根幹を曖昧なものとしている．

他方で近年 EPR 状態は，情報通信技術に目覚しい応用ができることがわかってきた．この状態（一般的に，エンタングルド状態）を活用すると，スーパーコンピュータをも圧倒する量子コンピュータ，絶対に解読されることのない量子暗号，物体（量子状態）の転送を可能とする量子テレポーテーションなどが可能となる[12]．不思議さは不思議なものとして素直に受け入れて，どのように活用するかということもまた科学のあり方であろう．

今後のさらなる展開からますます目が離せない．

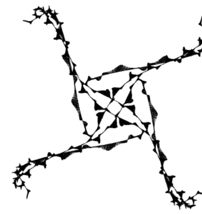
*14) ベルの結果に対するアインシュタインの反応は興味深いが，残念ながらその 9 年前にアインシュタインは亡くなっている．

参考文献

1) D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166 (1952).
2) E. Nelson, *Phys. Rev.* **150**, 1079 (1966).
3) A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
4) J.S. Bell, *Physics*, **1**, 195 (1964).
5) N.D. マーミン：『量子のミステリー』（訳 町田茂，丸善出版，1994）；筒井泉：『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』岩波書店（2011）.
6) D. Bohm, *Quantum Theory* (New York, 1951).
7) A. Aspect *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).
8) J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, R.A. Holt, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969).
9) A. Fine, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 291 (1982).
10) M.L.G. レッドヘッド：『不完全性・非局所性・実在主義―量子力学の哲学序説』（訳 石垣寿郎，みすず書房，1997）；A. Shimony, “Bell Theorem” in *Stanford Encyclopedia of Philosophy:* http://plato.stanford.edu/entries/bell-theorem).
11) B.S. Cirel'son, *Lett. Math. Phys.* **4**, 93 (1980).
12) 石坂智，小川朋宏，河内亮周，木村元，林正人：『量子情報科学入門』，共立出版（2012）.
13) H.P. Stapp, *Nuovo Cimento*, **29B**, 270 (1975).

（きむら・げん，芝浦工業大学システム理工学部）

場の量子論
因果律と局所場



川村 嘉春

1. はじめに

ミステリーの醍醐味は数少ない手がかりをもとにして，緻密で論理的，時には大胆な推理を繰り広げて謎解きを行い真実に到達することである．素粒子に関する研究過程もミステリーに似ているところがある．さらに興味深いことは，一つの謎が解かれた後に未知の現象や法則が予言され，その検証を通して新たな謎が発生し，謎解きが延々と展開されることである．

今回は場の量子論の一端をフィクションを交えながら，紹介しようと思う．通常のテキストや講義などではお目にかからないような話の展開や飛躍があると思うが，大胆な推理だと思って大目に見てほしい．

物語の主人公は明晰な頭脳を持つ探偵の「開鍵（ひらかぎ） はやか」である．彼のもとに依頼が舞い込んだ．ことの発端は「γ 選手が得意のかけっこで ν 選手に破れた．」という報道である．γ 選手が王者であってほしいと願うファンは多く，この勝敗の真偽を巡って，いろいろな憶測が飛び交った．フライング？ ドーピング？ 八百長？ …．真相の解明が彼に課せられた任務である．

はやかは依頼された仕事を始める前に，物理に関する課題（彼にとっては謎）を少数のヒントを基にして解いていくという一風変わった脳トレ（？）を実行する．これがほどよいウォーミング・アップになるらしい．課題とヒントは知り合いの物理学者の「朝永（ともなが） すみれ」が説明を交えて出すことになっている．

はやかはすみれに連絡を取った．そして，彼女を待つ間にコーヒーの準備をした．しばらくして，すみれが彼のオフィスに到着した．いつも通りのあいさつを交わしたのち，すみれが言った．「課題とヒントはすでに用意してあるわ．はやかさえよければいつでも始められるわ．」「それでは，お願いします．」とはやかが答えた．

今回，すみれが出した課題は「電子も因果律に従うのか？」である．すみれが説明を加えた．「**因果律**とは端的には「原因は結果に先んずる.」ことなのだけれど，これを物理的に読み替えると「働きかけは離れた場所に瞬時に伝わらず，有限の時間がかかる.」となるわ．この背後には「どんな働きかけも近接的に起こる.」，つまり，「働きかけを行う側も受ける側も（さらに伝える側も），働きかけに関して局所的である.」という仮定が存在するの．今回は課題の遂行に当たって，遠隔的な作用が存在しないことを前提条件としましょうか.」

はやかが確認した．「つまり，私が今ここで働きかけを行っても，それが伝わらない領域が存在するということだね．そのような領域を特定することが，最初のステップのようだね.」「その通り！ 今から，そのことに関するヒントを出すわ.」とすみれが答えた．

2. 光の性質をヒントにして

まず，すみれが出したヒントは光の性質に関するものである．

A.	光（電磁波）の速さは一定である．
B.	電磁波は光の粒（光子）の集まりである．

2.1 電磁波と光子

すみれがヒント A について説明を加えた．「真空中では光の速さはどんな慣性系で測っても，有効数字 3 桁として $c = 3.00 \times 10^8$ m/s という値で観測されるの．ここで，**慣性系**とは「慣性の法則：物体に働く力がゼロの場合，物体の運動状態は変化せず，等速直線運動を行う.」が成り立つ座標系のことよ.」

はやかはヒントAを数式化してみた.

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = c, \quad \frac{d\boldsymbol{x}'}{dt'} = c. \tag{1}$$

さらに，これらと等価な式を書き下した.

$$(cdt)^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 = (cdt')^2 - |d\boldsymbol{x}'|^2 = 0. \tag{2}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$ および $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'(t')$ はそれぞれ慣性系IおよびI'における時刻 t および t' での光の位置ベクトルである．直交座標 $x^\mu = (ct, \boldsymbol{x}) = (ct, x, y, z)$, $x'^\mu = (ct', \boldsymbol{x}') = (ct', x', y', z')$ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ を採用している．太字は3次元ベクトルを表す．$d\boldsymbol{x} \neq d\boldsymbol{x}'$ のとき，$t \neq t'$ となり，すべての慣性系に共通の時間は存在しないことがわかる.

すみれがヒントBについて説明を加えた.「振動数 $\nu = 1/T$（T は周期），波長 λ の電磁波はエネルギー $E = \hbar\omega$，運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ を持つ**光子**と呼ばれる光の粒の集まりよ．ここで，$\hbar = h/(2\pi)$ は換算プランク定数で有効数字3桁として，$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J·s ね．ω は角振動数，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルで ν, λ とそれぞれ $\omega = 2\pi\nu$, $|\boldsymbol{k}| = 2\pi/\lambda$ という関係があるの．電磁波の速さは $\lambda/T(= \omega/|\boldsymbol{k}|)$ で，これが c に等しいので $\omega = |\boldsymbol{k}|c$ が成り立つわ.」

これを聞いて，はやかは $E = |\boldsymbol{p}|c$ を導き，(2) を参考にして，

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - |\boldsymbol{p}'|^2 = 0 \tag{3}$$

を書き下した．ここで，$E, \boldsymbol{p}$ および $E', \boldsymbol{p}'$ はそれぞれ慣性系IおよびI'におけるエネルギー，運動量である.

2.2 特殊相対性理論

はやかはヒントAから，次のような予想を立ててみた.

【予想】 光子以外の物体もあらゆる慣性系で同じ運動法則に従う．もう一歩進んで，慣性系はすべて同等に扱われる.

「素晴らしい！ このような性質は**相対性原理**と呼ばれているわ.」とすみれが言って，説明を加えた.「さっきのヒントAと相対性原理を組み合わせることにより，重力を無視した場合，私たちは**4次元ミンコフスキー時空**と呼ばれる時間と空間が絡んだ舞台に住んでいることがわかるわ．そして，その舞台上で構築された理論が**特殊相対性理論**なの[1]．

4次元ミンコフスキー時空において，点 x^μ と点

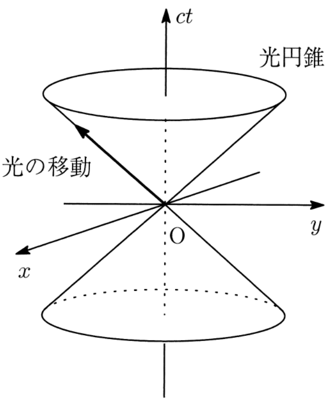


図1 光円錐と光の移動.

$x^\mu + dx^\mu$ との間の世界間隔の2乗 ds^2 は

$$ds^2 \equiv (cdt)^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 \tag{4}$$

で定義され，この値は慣性系に依らないわ．つまり，慣性系IおよびI'の間で，

$$(cdt)^2 - |d\boldsymbol{x}|^2 = (cdt')^2 - |d\boldsymbol{x}'|^2 \tag{5}$$

が成り立つの.」

はやかが確認した.「光の運動は ds^2 の値がゼロの場合に相当するのだね.」すみれは「そう.」と答え，次のような仮定を追加した.

【仮定】 光の速さを超える速さで移動する物体は存在しない.

はやかが言った.「この仮定から，因果律は次のように表現できそうだね.」

【因果律】 原因から生じる影響は光の速さを超えて伝わることはない.

早速，はやかは働きかけがなされない領域を不等式を用いて表してみた.

$$(x^0 - y^0)^2 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2. \tag{6}$$

(6) を満たす2点 $x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x})$ と $y^\mu = (y^0, \boldsymbol{y})$ は**空間的に離れた点**と呼ばれ，光の速さを超えて移動しない限り一方から他方に到達することができない．図1を参照してほしい．点Oから発せられた光は**光円錐**と呼ばれる円錐の表面を移動する．点Oに対して，空間的に離れた領域は光円錐の外部である.

また，(4) と (5) の拡張として，

$$s^2 \equiv (x^0 - y^0)^2 - |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2$$

$$= (x'^0 - y'^0)^2 - |\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}'|^2 \tag{7}$$

が成り立つ．(6) と組み合わせることにより，空間的に離れた 2 点に関して $s^2 < 0$ であることおよび空間的に離れた点という概念は慣性系に依らないことがわかる．さらに，空間的に離れた任意の 2 点 x^μ と y^μ に対して，$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2 = -s^2$ である座標を選ぶことにより，2 点の時刻が同時刻（$x^0 = y^0$）になるような慣性系を設定することができる．

はやかは光以外の物体に関する運動について考察した．物体の運動に着目するとその値が慣性系に依らない時間が存在する．それは**固有時**と呼ばれ，物体とともに動く観測者の時計が刻む時間 τ で（物体の位置は変化しないので），

$$ds^2 = (cd\tau)^2 \tag{8}$$

が成り立つ．(4) と (8) と慣性系 I での物体の速さ $v = |d\boldsymbol{x}/dt|$ を用いて，次式が導かれる．

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \tag{9}$$

τ を用いて，**4 元運動量**を

$$p^\mu \equiv (p^0, \boldsymbol{p}) = \left(m\frac{dx^0}{d\tau}, m\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right) \tag{10}$$

と定義する．ここで，m は粒子の質量である．次の変形から，p^0 に c を掛けた量は粒子のエネルギー E に相当することがわかる．

$$\begin{aligned} p^0 c &= mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \\ &= mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \cdots . \end{aligned} \tag{11}$$

また，次のような関係式が成り立つ．

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 &= m^2 \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 - m^2 \left|\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}\right|^2 \\ &= m^2 \frac{ds^2}{(d\tau)^2} = m^2 c^2. \end{aligned} \tag{12}$$

右辺の m^2c^2 が定数であることに注意しよう．$E = p^0 c$ と (12) と相対性原理を用いて，慣性系 I および I′ において，

$$\left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\boldsymbol{p}|^2 = \left(\frac{E'}{c}\right)^2 - |\boldsymbol{p}'|^2 = m^2c^2 \tag{13}$$

が成り立つことがわかる．(3) と (13) を比較することにより，**光子の質量はゼロである**と言える．光子の場合，$m = 0, d\tau = 0$ であるため (10) の定義式は当てはまらないが，(13) は依然有効である．

$x^0 = ct$ と (10) と (12) を用いて，

$$v = \left|\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}\right| = c\left|\frac{\boldsymbol{p}}{p^0}\right| = \frac{c|\boldsymbol{p}|}{\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2c^2}} \tag{14}$$

が導かれ，$m^2 \geq 0$ である限り $v \leq c$ となり，先の仮定が成り立つことがわかる．

はやかがぽつりとつぶやいた．「特殊相対性理論において光が特別な役割を演じているのは，その質量がゼロであるという性質に起因しているからだね．つまり，c は質量ゼロの物体の速さと言ったほうがよさそうだね．」

3. 素粒子の性質をヒントにして

すみれが次に出したヒントは素粒子の性質に関するものである．

> **C.** 万物は**素粒子**と呼ばれる基本的な構成要素からできていて，粒子性と波動性を合わせ持つ．
> **D.** 素粒子は生成したり消滅したりする．

実際，電子および陽電子は素粒子の一種でそれらが衝突すると消滅し，光子が生成される．逆に，光子が消滅して電子と陽電子の対が発生したりする．すみれが言った．「簡単のため素粒子間に働く相互作用を無視して課題を遂行してみて．つまり，素粒子を自由粒子として扱ってみて．」

はやかの次なる作業は素粒子の生成・消滅を記述する理論的な枠組みを構成することである．

3.1 場の量子論

ヒント C に基づいて，はやかは以下のような推論を展開した．まず，一般性という観点から素粒子の粒子性と波動性を仲介する公式として，光子と同じ形のもの

$$E = \hbar\omega, \quad \boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k} \tag{15}$$

を採用した．ここで，$E, \boldsymbol{p}$ は素粒子のエネルギー，運動量で素粒子の質量を m として，(12) から $-(E/c)^2 + |\boldsymbol{p}|^2 + m^2c^2 = 0$ が成り立つ．また，$\omega, \boldsymbol{k}$ は素粒子を波とした場合の角振動数，波数ベクトルである．

自由粒子の場合，$E, \boldsymbol{p}$ は一定であるから，このような状態は平面波

$$e^{\pm i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})} = e^{\pm \frac{i}{\hbar}(Et - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x})} \tag{16}$$

で記述されると考えた．これが自由な素粒子の状態を

表す波動関数（の一部）に相当する．

さらに，波として素粒子が従う方程式を導くために，「(16) を解とする波動方程式はどんな形か？」という問いを設け，その答えとして，

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi(x)=0 \tag{17}$$

を導いた．ここで，簡単のため $\phi(\boldsymbol{x},t)$ を $\phi(x)$ と記した（x を $\boldsymbol{x}$ の x 成分と混同しないように）．

すみれがすかさず言った．「するどいね．はやか！この方程式は**クライン・ゴルドン方程式**と呼ばれる相対論的な波動方程式で，素粒子は自由な状態で (17) の解になっているはずよ．」「ということは，光子の質量はゼロなので，光子の波動関数は $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\boldsymbol{\nabla}^2\right)\phi_\gamma(x)=0$ に従うはずだね．」とはやかが答え，この方程式が電磁波（電磁場）を記述するマックスウェル方程式と同じ形であることに気付いた．

さらに，はやかは「巨視的な世界と微視的な世界は連続的につながっているはずなので，電磁場に関する量子論的な対応物（**量子場**）もマックスウェル方程式に従うに違いない．」と考え，次のような予想を立てた．

【予想】 自由な素粒子に関する量子場が従う方程式は 1 個の素粒子の状態を記述する波動関数が従う波動方程式と同じ形で，巨視的な極限が存在すれば，古典場のものとも同じである．

ここで，場と波動関数を区別していることに注意しよう．光を例にとると，場は光子の集まりを表す電磁場（およびその量子版）で，波動関数は光子の状態を記述する関数である．

はやかは，自ら立てた予想に基づき量子場としての $\phi(x)$ の意味について考えた．

まず，(17) の一般解を書き下してみた．

$$\phi(x)=\int\frac{\sqrt{c\hbar}\,d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}}\left(a(\boldsymbol{k})e^{-ikx}+a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{ikx}\right). \tag{18}$$

ここで，$kx=k^0x^0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}=\omega_{\boldsymbol{k}}t-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}$ で，k^0 は $k^0=\omega_{\boldsymbol{k}}/c=\sqrt{|\boldsymbol{k}|^2+m^2c^2/\hbar^2}$ を満たす．係数は次元を考慮して，後の便宜のために選んだ．また，簡単のため古典場の場合に $\phi(x)$ は実数値を取るとして，$a(\boldsymbol{k})$ の複素共役に相当するものを $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ と記した．

古典場における計算をそのまま用いて，$\phi(x)$ のエネルギーを計算したところ

$$\begin{aligned}E_\phi&=\int\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2+(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2\right]d^3x\\&=\int\frac{1}{2}\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\left(a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})+a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})\right)d^3k\\&=\int\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})d^3k\end{aligned} \tag{19}$$

が得られた．ここで，$\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}$ は運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を有する粒子のエネルギーなので，$\int a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})d^3k$ は粒子数と解釈できる（最後の表式に移るところで，深く考えずに $a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})$ を $a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ に変えたが，これが正しい手続きかどうかについては後ほど検証をする）．

ヒント D に基づいて，はやかは次のような予想を立てた．

【予想】 $\phi(x)$ は時空点 x における素粒子の生成・消滅を司る演算子の役割を担う**局所場**である．具体的には，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$, $a(\boldsymbol{k})$ が運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を有する粒子の生成あるいは消滅演算子の働きをする．

そして，次のような推論を繰り広げた．演算子が存在すれば，それが作用する対象としてある種のベクトル空間が導入される．$a(\boldsymbol{k})$ を粒子の消滅演算子，そのエルミート共役演算子である $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ を粒子の生成演算子とみなした場合，ベクトル空間の元は次のように構成されるだろう．粒子が一個もない状態（**真空状態**で $|0\rangle$ と記す）に対して，$a(\boldsymbol{k})|0\rangle=0$ が成り立つ．運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を持つ一粒子状態，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ と $\hbar\boldsymbol{l}$ を持つ二粒子状態はそれぞれ

$$a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle,\quad a^\dagger(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{l})|0\rangle \tag{20}$$

で与えられ，n 粒子状態も同様に構成される．

$N\equiv\int a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})d^3k$ は粒子の個数演算子と解釈され，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$ を持つ n 粒子状態 $(a^\dagger(\boldsymbol{k}))^n|0\rangle$ に作用した場合，固有値 n を導くはずである．これを式で表すと，

$$N(a^\dagger(\boldsymbol{k}))^n|0\rangle=n(a^\dagger(\boldsymbol{k}))^n|0\rangle \tag{21}$$

となる．微分公式

$$\int d^3k'a^\dagger(\boldsymbol{k}')\frac{\delta}{\delta a^\dagger(\boldsymbol{k}')}(a^\dagger(\boldsymbol{k}))^n=n(a^\dagger(\boldsymbol{k}))^n \tag{22}$$

に着目すると，(21) と (22) より $a(\boldsymbol{k})$ が

$$a(\boldsymbol{k})=\frac{\delta}{\delta a^\dagger(\boldsymbol{k})} \tag{23}$$

のように表現できることがわかる．この場合，$a^\dagger(\boldsymbol{k})$ は $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ を掛ける演算子なので，

$$
\begin{aligned}
&[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})] = \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}),\\
&[a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{l})] = 0, \quad [a^\dagger(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})] = 0
\end{aligned} \tag{24}
$$

が導かれる．ここで，$[A,B] \equiv AB - BA$, $\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})$ はディラックのデルタ関数である．

$a(\boldsymbol{k})$ と $a^\dagger(\boldsymbol{k})$ が (24) を満たす場合，(19) において $a(\boldsymbol{k})a^\dagger(\boldsymbol{k})$ を $a^\dagger(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k})$ に変える際に，最後の表式に $\int d^3k(1/2)\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\delta^3(\boldsymbol{0}) = \int d^3kd^3x(1/2)\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}/(2\pi)^3$（無限大の量）のおつりが現れる．ただし，重力を考慮しない限りエネルギーの値そのものは物理的に意味がないので，真空状態でエネルギーがゼロになるように定義すれば，E_ϕ の最後の表式は有効である．

(24) は次の条件と等価である．

$$
\begin{aligned}
&[\phi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)] = i\hbar\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\\
&[\phi(\boldsymbol{x},t), \phi(\boldsymbol{y},t)] = 0,\\
&[\pi(\boldsymbol{x},t), \pi(\boldsymbol{y},t)] = 0.
\end{aligned} \tag{25}
$$

ここで，$\pi(\boldsymbol{x},t) = (1/c^2)\partial\phi(\boldsymbol{x},t)/\partial t$ である．

(19) より，ϕ と π を用いて，場のエネルギーは

$$
H = \int \frac{1}{2}\left[(c\pi)^2 + (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi^2\right]d^3x \tag{26}
$$

と書き表される．公式 $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$ と (17), (25) を用いて，次のような 2 組の方程式が導かれる．

$$
\frac{1}{i\hbar}[\phi(x), H] = c^2\pi(x) = \frac{\partial\phi(x)}{\partial t}, \tag{27}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i\hbar}[\pi(x), H] &= \left[\boldsymbol{\nabla}^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi(x)\\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi(x)}{\partial t^2} = \frac{\partial\pi(x)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{28}
$$

(25) と (27) と (28) を眺めて，はやかは次のことに気付いた．交換子 $[A,B]/(i\hbar)$ をポアソン括弧 $\{A,B\}_{\mathrm{PB}}$ に置き換えると場の解析力学でお馴染みの関係式やハミルトンの正準方程式が導かれるではないか．つまり，微視的な世界の理論を構成する方法として，以下のような手続きが有効ではないだろうか．

1. 正準形式に基づく場の古典論を構成する．

2. 正準変数を演算子とみなして，ポアソン括弧を交換子に置き換える．

すみれが言った．「さすが，はやか！ このようにして構成された理論は**場の量子論**と呼ばれているわ[2]．ϕ が電子とみなせるかどうかは後回しにして，ϕ が因果律に従うか考察してみてはどう？」

3.2 微視的因果律

すみれの提案に従い，はやかは因果律について推考した．微視的な世界で働きかけは素粒子の生成，伝搬，消滅という形でなされるであろう．よって，因果律を検証するためには，「空間的に離れた 2 点 x^μ と y^μ における ϕ による働きかけが独立である．」ことを示せばよいであろう．働きかけが独立な場合，それらは作用する順番に依らないはずである．このことを数式で表すと，$(x^0-y^0)^2 < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2$ において，

$$
\phi(x)\phi(y) = \phi(y)\phi(x) \tag{29}
$$

となる．はやかは，実際に，(18) を用いて，

$$
\begin{aligned}
&[\phi(x), \phi(y)] \equiv \phi(x)\phi(y) - \phi(y)\phi(x)\\
&= \int \frac{c\hbar d^3kd^3l}{(2\pi)^3\sqrt{2k^0\ 2l^0}}\Big([a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})]e^{-ikx+ily}\\
&\qquad\qquad + [a^\dagger(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{l})]e^{ikx-ily}\Big)\\
&= \int \frac{c\hbar d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}\left(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)}\right)\\
&= \int \frac{c\hbar d^3k}{(2\pi)^3 2k^0}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}\left(e^{-ik^0(x^0-y^0)} - e^{ik^0(x^0-y^0)}\right)
\end{aligned} \tag{30}
$$

を導いた．最後の表式に移る際に，被積分関数の第 2 項の変数を $\boldsymbol{k}$ から $-\boldsymbol{k}$ に変えている．

(30) より，同時刻 $x^0 = y^0$ で $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ である．また，空間的に離れた任意の 2 点 x^μ と y^μ に対して，$x^0 = y^0$ となるような慣性系が存在する．(7) を含む段落の議論を思い出そう．このようにして，**微視的因果律**と呼ばれる関係式 (29) が成り立つこと，つまり，ϕ が因果律に従うことが確かめられた．

すみれが補足した．「ϕ の生成・消滅を通して，エネルギーや運動量のやりとりがなされるわ．つまり，場の量子論では，力は素粒子により媒介されるの．そして，素粒子は波として伝搬するわ．」

4. 電子の性質をヒントにして

すみれは電子の性質に関するヒントを出した．

E. 電子はスピンに関する 2 つの状態を有する．

F. 電子はパウリの排他律に従う．

すみれが説明を加えた．「**スピン**とは粒子に固有の角運動量で $\hbar$ を単位として，整数または半奇数値を取るわ．電子の場合，$\hbar/2$ あるいは $-\hbar/2$ になるわ．パ

ウリの排他律とは電子は個別性がなく，同時に同じ状態に存在することができないという性質のことよ．この性質は $(a^\dagger(\boldsymbol{k}))^n|0\rangle$ $(n \geq 2)$ と相容れないの．よって，(17) を基礎方程式とする理論を用いて，電子を記述できないわ．ちなみに，陽電子もヒント E や F の性質を有しているわ．」

残された課題は，電子に関する場の量子論の構築とそれを用いた因果律の検証である．

4.1 電子に関する場の量子論

はやかは，ヒント E を踏まえ F を数式で表してみた．運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$，スピン状態 s を有する電子の消滅演算子を $b(\boldsymbol{k}, s)$，生成演算子を $b^\dagger(\boldsymbol{k}, s)$ とすると，パウリの排他律が意味するところは，次の如くである．

$$(b(\boldsymbol{k}, s))^2 = 0, \quad (b^\dagger(\boldsymbol{k}, s))^2 = 0. \tag{31}$$

これらに基づき，次のような予想を立てた．

【予想】 電子に関する生成・消滅演算子は次のような代数関係に従う．

$$\begin{aligned}&\{b(\boldsymbol{k}, s), b^\dagger(\boldsymbol{l}, s')\} = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l}),\\ &\{b(\boldsymbol{k}, s), b(\boldsymbol{l}, s')\} = 0,\\ &\{b^\dagger(\boldsymbol{k}, s), b^\dagger(\boldsymbol{l}, s')\} = 0.\end{aligned} \tag{32}$$

ここで，$\{A, B\} \equiv AB + BA$, $\delta_{ss'}$ はクロネッカーのデルタである．(33) の特別な場合として，(31) が含まれていることに注意しよう．

陽電子は電子の反粒子で電荷の符号が反対であることを除いて，電子と同じ特徴（同じ質量，同じスピンの自由度）を有している．よって，運動量 $\hbar\boldsymbol{k}$，スピン状態 s を有する陽電子の消滅演算子を $d(\boldsymbol{k}, s)$，生成演算子を $d^\dagger(\boldsymbol{k}, s)$ として，

$$\begin{aligned}&\{d(\boldsymbol{k}, s), d^\dagger(\boldsymbol{l}, s')\} = \delta_{ss'}\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{l}),\\ &\{d(\boldsymbol{k}, s), d(\boldsymbol{l}, s')\} = 0,\\ &\{d^\dagger(\boldsymbol{k}, s), d^\dagger(\boldsymbol{l}, s')\} = 0\end{aligned} \tag{33}$$

が成り立つはずである．さらに，電子と陽電子は別物なので，$b(\boldsymbol{k}, s)$, $b^\dagger(\boldsymbol{k}, s)$ と $d(\boldsymbol{k}, s)$, $d^\dagger(\boldsymbol{k}, s)$ は反交換（$BA = -AB$）する．

電子場が従う波動方程式の構築に向けて，さらに推考を重ねた．電子および陽電子はスピンに関する 2 つの状態を有しているので，それらを記述するために波動関数は 2 成分ずつ必要だろう．また，電荷の保存の観点から，「電子の消滅（生成）」と「陽電子の生成（消滅）」は同じ振舞いを示すので，量子場の中には $b(\boldsymbol{k}, s)$ と $d^\dagger(\boldsymbol{k}, s)$（あるいは $b^\dagger(\boldsymbol{k}, s)$ と $d(\boldsymbol{k}, s)$）が同時に現れるだろう．これらを踏まえて，電子場 $\psi(x)$ は

$$\psi(x) = \int \frac{\sqrt{c\hbar}d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} \sum_s \Big(b(\boldsymbol{k}, s)u(\boldsymbol{k}, s)e^{-ikx} + d^\dagger(\boldsymbol{k}, s)v(\boldsymbol{k}, s)e^{ikx}\Big) \tag{34}$$

のように書き表されるだろう．ここで，$u(\boldsymbol{k}, s)$, $v(\boldsymbol{k}, s)$ は 4 成分量で波動関数の一部である．

波動関数が 4 成分であるということは，それに作用する演算子は 4 行 4 列の行列であろう．さらに，微分方程式において，一般に成分の増加に伴う方程式の増加はそこに含まれる微分の階数の減少を意味する．これらのことから，はやかは「電子場が従う方程式は時空に関する 1 階微分を 4 行 4 列の行列の形で含む．」と予想し，次のような波動方程式を導いた[1)]．

$$\left(i\gamma^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} - \frac{mc}{\hbar}\right)\psi(x) = 0. \tag{35}$$

すみれが叫んだ．「相変わらずキレキレだね．はやか！ この方程式は**ディラック方程式**と呼ばれているわ．」ここで，$(\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ は

$$\begin{aligned}&(\gamma^0)^2 = I, \ \ \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = 2\delta^{ij},\\ &\gamma^i\gamma^0 + \gamma^0\gamma^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)\end{aligned} \tag{36}$$

を満たす 4 行 4 列の行列で，I は 4 行 4 列の単位行列である．実際，(35) の両辺に左から演算子

$$-\left(i\gamma^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \frac{mc}{\hbar}\right) \tag{37}$$

を作用させるとクライン・ゴルドン方程式が導かれる．つまり，ψ はクライン・ゴルドン方程式の解でエネルギー，運動量は (12) を満たす．

(34) が (35) を満たすためには u, v は

$$\left(\gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} - \frac{mc}{\hbar}\right)u(\boldsymbol{k}, s) = 0, \tag{38}$$

$$\left(\gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} + \frac{mc}{\hbar}\right)v(\boldsymbol{k}, s) = 0 \tag{39}$$

を満たす必要がある．

4.2 電子に関する因果律

はやかは最終段階である因果律の確認作業に取り掛かった．

まず，(34) の両辺のエルミート共役を取り，γ^0 を右から掛けてみた．

$$\overline{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x)\gamma^0$$

$$= \int \frac{\sqrt{c\hbar}d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3 2k^0}} \sum_s \Big(b^\dagger(\boldsymbol{k},s)\overline{u}(\boldsymbol{k},s)e^{ikx} + d(\boldsymbol{k},s)\overline{v}(\boldsymbol{k},s)e^{-ikx} \Big). \quad (40)$$

ここで，$\overline{u}(\boldsymbol{k},s) \equiv u^\dagger(\boldsymbol{k},s)\gamma^0$ および $\overline{v}(\boldsymbol{k},s) \equiv v^\dagger(\boldsymbol{k},s)\gamma^0$ で，次のような関係式が成り立つ．

$$\sum_s u(\boldsymbol{k},s)\overline{u}(\boldsymbol{k},s) = \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} + \frac{mc}{\hbar}, \quad (41)$$

$$\sum_s v(\boldsymbol{k},s)\overline{v}(\boldsymbol{k},s) = \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{k} - \frac{mc}{\hbar}. \quad (42)$$

はやかは少し思案し，(34) を用いて (30) に相当する関係式

$$\begin{aligned}
&\{\psi^\alpha(x), \overline{\psi}^\beta(y)\} = \psi^\alpha(x)\overline{\psi}^\beta(y) + \overline{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x) \\
&= \int \frac{c\hbar d^3k d^3l}{(2\pi)^3\sqrt{2k^0\ 2l^0}} \sum_{s,s'} \Big(\{b(\boldsymbol{k},s), b^\dagger(\boldsymbol{l},s')\} \\
&\quad \times u^\alpha(\boldsymbol{k},s)\overline{u}^\beta(\boldsymbol{l},s')e^{-ikx+ily} \\
&\quad + \{d^\dagger(\boldsymbol{k},s), d(\boldsymbol{l},s')\} v^\alpha(\boldsymbol{k},s)\overline{v}^\beta(\boldsymbol{l},s')e^{ikx-ily} \Big) \\
&= \int \frac{c\hbar d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \sum_s \Big(u^\alpha(\boldsymbol{k},s)\overline{u}^\beta(\boldsymbol{k},s)e^{-ik(x-y)} \\
&\qquad + v^\alpha(\boldsymbol{k},s)\overline{v}^\beta(\boldsymbol{k},s)e^{ik(x-y)} \Big) \\
&= \left(i\gamma^0 \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} - i\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \frac{mc}{\hbar} \right)^{\alpha\beta} \\
&\quad \times \int \frac{c\hbar d^3k}{(2\pi)^3 2k^0} \Big(e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)} \Big) \qquad (43)
\end{aligned}$$

を導き，空間的に離れた 2 点に関して，

$$\psi^\alpha(x)\overline{\psi}^\beta(y) = -\overline{\psi}^\beta(y)\psi^\alpha(x) \qquad (44)$$

が成り立つことを示した．ここで，α, β は 4 成分を表す添字である．同様にして，

$$\begin{aligned}
\psi^\alpha(x)\psi^\beta(y) &= -\psi^\beta(y)\psi^\alpha(x), \\
\overline{\psi}^\alpha(x)\overline{\psi}^\beta(y) &= -\overline{\psi}^\beta(y)\overline{\psi}^\alpha(x)
\end{aligned} \qquad (45)$$

が成り立つことを示した．

ψ そのものは観測量ではないが，$\psi(x)$ と $\overline{\psi}(x)$ で構成された 2 次の量 $\Phi_n(x) \equiv \overline{\psi}(x)\Gamma_n\psi(x)$（$\Gamma_n$ は 4 行 4 列の定数行列で 16 種類存在し，γ^0 と $\boldsymbol{\gamma}$ およびそれらの積を用いて構成することができる）が観測量となり，それらによる働きかけは空間的に離れた 2 点に関して，$n, m = 1, 2, \cdots, 16$ に対して，

$$\Phi_n(x)\Phi_m(y) = \Phi_m(y)\Phi_n(x) \qquad (46)$$

を満たす必要がある．公式 $[AB, CD] = A\{B,C\}D - AC\{B,D\} + \{A,C\}DB - C\{A,D\}B$ と (44) と (45) を用いて，(46) が成立することがわかる．このようにして，はやかは電子も因果律に従うことを確認し難なく課題をクリアした．

すみれが締めくくった．「お疲れ様．結局，特殊相対論的な場の量子論において，**因果律とは空間的に離れた 2 点間で局所場の演算子が交換する，あるいは反交換する**という性質のことなの．この性質は相互作用が加わっても，それが局所的なものである限り成り立つわ．」

5. おわりに

すみれが補足した．「スピンが（$\hbar$ を単位として）整数の粒子はボース粒子あるいはボソンと呼ばれ，ボース・アインシュタイン統計に従うわ．また，スピンが半奇数の粒子はフェルミ粒子あるいはフェルミオンと呼ばれ，フェルミ・ディラック統計に従うわ．このようなスピンと統計の関係は因果律を含むいくつかの要請（公理）の下で特殊相対論的な場の量子論を用いて証明されているわ．いずれ，取り上げましょうか．」

はやかが尋ねた．「なぜ，今回，因果律に関する課題を出したんだい？」すみれが答えた．「最近，arXiv に投稿された論文が気になっているからよ．」その論文とはスピンと統計の関係を再考する内容のものらしい[3]．

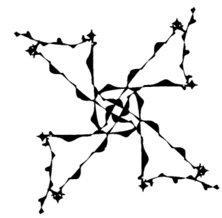
はやかはコーヒーを飲みほした後，依頼の案件の調査のためにオフィスをあとにした．

参考文献

1) 川村嘉春：『相対論的量子力学』，裳華房（2012）．
2) S. Weinberg: “The Quantum Theory of Fields, Volume I Foundations”, Cambridge University Press (1994).
3) Y. Kawamura: “Fermionic scalar field”, arXiv 1406.6155 [hep-th].

（かわむら・よしはる，信州大学理学部）

大局的対称性と局所的対称性



谷井　義彰

1. 場の理論における対称性

力学系において，力学変数のある変換に対して運動方程式や作用が不変であるとき，その系は対称性をもつという．ここでは，相対論的場の理論の対称性について考える．場の理論の対称性は，**大局的対称性**と**局所的対称性**に分けられる．大局的対称性は，変換のパラメータが定数である大局的変換に対する対称性であり，それに対応して保存量が存在する．局所的対称性は，変換のパラメータが時空座標 x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ の任意関数である局所的変換に対する対称性であり，系に非物理的自由度が含まれていることを意味する．本稿では，場の理論における大局的対称性と局所的対称性の関係について述べる．

場の理論の対称性の例として，スピノール場の位相変換に対する対称性を考えよう．相互作用のない自由なスピノール場 $\psi(x)$ のラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{1}$$

である．スピノール場の位相変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{i\theta}\psi(x) \tag{2}$$

を行うと，Dirac 共役は，$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)\,\mathrm{e}^{-i\theta}$ のように逆の位相の変換をするので，このラグランジアンは不変である．この変換は群 $U(1)$ をなすため，この対称性は $U(1)$ 対称性とよばれる．この変換では，変換のパラメータ θ は定数である．これは，時空のすべての点で一斉に同じ変換を行うことを意味している．このような変換のパラメータが定数であるような対称性を，大局的対称性という．

一方，変換のパラメータが時空座標の任意関数 $\theta(x)$ である変換

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \mathrm{e}^{i\theta(x)}\psi(x) \tag{3}$$

に対する対称性を，局所的対称性という．これは，時空の各点で独立な変換を行うことを意味している．場の理論は空間の各点に力学的自由度をもつ理論であるため，空間の各点で独立な変換を考えることは自然なことである．相対論的場の理論では時間と空間座標は一緒に現れるので，各時刻でも独立な変換になっている．ラグランジアン (1) は，局所的変換 (3) に対して不変にはなっていない．実際，場の微分の変換には，

$$\partial_\mu\psi \to \mathrm{e}^{i\theta}(\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\theta\,\psi) \tag{4}$$

のように変換のパラメータ θ の微分を含む項が現れ，そのため，ラグランジアンは不変ではない．

局所 $U(1)$ 変換に対して不変な理論をつくるには，電磁場を導入する．相対論的に共変な定式化では，電場と磁場は**場の強さ**とよばれるテンソル

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{5}$$

によって表される．$A_\mu(x)$ は，4 元ポテンシャルである．よく知られているように，場の強さ $F_{\mu\nu}$

が与えられたとき，ポテンシャル A_μ の選び方は一意的ではない．ある A_μ が (5) を満たすとき，それを

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \theta \tag{6}$$

のように置き換えても，同じ $F_{\mu\nu}$ に対する (5) を満たす．ここで，e は定数で，後で相互作用の強さを表す結合定数であることがわかる．変換 (6) は，**ゲージ変換**とよばれる．この変換には，(4) と同様に，変換のパラメータの微分 $\partial_\mu\theta$ が含まれている．したがって，A_μ を含む**共変微分**

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu - ieA_\mu)\psi \tag{7}$$

を定義すると，それは $\partial_\mu\theta$ を含まない変換 $D_\mu\psi \to \mathrm{e}^{i\theta}D_\mu\psi$ をする．共変微分を使ったラグランジアン

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \tag{8}$$

は，局所的変換 (3), (6) に対して不変である．第 1 項は電磁場の運動項である．このようにして，大局的対称性をもつ理論に電磁場を導入することによって，局所的対称性をもつ理論をつくることができた．

以下で見るように，他の大局的対称性についても，電磁場に対応する適当な場を導入することによって，局所的対称性をもつ理論をつくることができる．このとき，新しく導入する場を**ゲージ場**という．いろいろな局所的変換とゲージ場を表 1 に示した．一般に，力学系において，変換のパラメータが時間の任意関数であるような変換に対する対称性を**ゲージ対称性**という．ゲージ対称性をもつ理論では，そのような変換によって，理論に含まれている力学変数の一部を取り除くことができる．したがって，ゲージ対称性は，理論に物理的自由度をもたない力学変数が含まれていることを意味している．相対論的場の理論の局所的対称性は，変換のパラメータが時間の任意関数であるので，ゲージ対称性である．そのため，局所的対称性をもつ場の理論を**ゲージ理論**という．

局所的対称性は，理論を構成する際の基本原理と考えることができる．局所的対称性を要請すると，ラグランジアンや場の方程式の形が制限される．例えば，上の例では，スピノール場と電磁場の相互作用は，局所的対称性によって導入された共変微分に含まれている．また，電磁場の質量項 $-\frac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu$ は，局所的対称性によって禁止される．一般座標変換に対する局所的対称性は，一般相対性原理を数学的に表したものであり，重力の理論をつくる際の基本原理である．さらに，素粒子の標準理論も，$SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ゲージ対称性に基づいてつくられている．

表 1　局所的変換とゲージ場．

局所的変換	ゲージ場
局所 $U(1)$ 変換	電磁場
局所 G 変換	Yang–Mills 場
一般座標変換	四脚場
局所 Lorentz 変換	スピン接続
局所超変換	Rarita–Schwinger 場

2. Yang–Mills 理論

上で見た局所 $U(1)$ 対称性は，より一般的な内部対称性の場合に拡張することができる[1]．簡単のため，$SU(2)$ 対称性の場合を考えよう．一般的なコンパクト Lie 群 G に対しても同様な理論をつくることができる．

例として，2 つの自由なスピノール場 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ の理論を考えよう．2 つのスピノール場を 2 成分の列ベクトル

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \tag{9}$$

で表すと，ラグランジアンは (1) と同じ形になる．このラグランジアンは，大局的 $SU(2)$ 変換

$$\psi(x) \to U\psi(x) \tag{10}$$

に対して不変である．ここで，U は行列式が 1 の 2×2 ユニタリー行列である．このような行列は，トレースがゼロの 2×2 エルミート行列の基底 T_a $(a=1,2,3)$ を使って，

$$U = \mathrm{e}^{i\theta^a T_a} \tag{11}$$

と表すことができる．θ^a は，定数の変換パラメータである．T_a は，$SU(2)$ の Lie 代数の表現行列であり，交換関係と規格化条件

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c,\ \ \mathrm{tr}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \quad (12)$$

を満たす．

この理論にゲージ場を導入して，変換のパラメータが時空座標の任意関数 $\theta^a(x)$ である局所 $SU(2)$ 変換に対して不変な理論をつくることができる．ゲージ場として，各生成子 T_a ごとにベクトル場 $A^a_\mu(x)$ を導入し，$SU(2)$ Lie 代数の行列に値をもつ場 $A_\mu(x) = A^a_\mu(x)T_a$ を定義する．このような場 A_μ を **Yang–Mills 場**という．局所 $SU(2)$ 変換に対して不変なラグランジアンは，

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) - \bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (13)$$

と書ける．ここで，ゲージ場の場の強さとスピノール場に対する共変微分は，

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \\ D_\mu\psi &= (\partial_\mu - igA_\mu)\psi \end{aligned} \quad (14)$$

と定義される．ここで，g は相互作用の強さを表す結合定数である．このラグランジアンは，局所 $SU(2)$ 変換

$$\begin{aligned} A_\mu &\to UA_\mu U^{-1} + \tfrac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1}, \\ \psi &\to U\psi \end{aligned} \quad (15)$$

に対して不変である．実際，この変換に対して場の強さと共変微分 (14) が，

$$F_{\mu\nu} \to UF_{\mu\nu}U^{-1},\quad D_\mu\psi \to UD_\mu\psi \quad (16)$$

のように共変的に変換することに注意すると，ラグランジアンの不変性を容易に示すことができる．無限小変換の場合は，変換 (15) は

$$\delta A_\mu = \frac{1}{g}D_\mu\theta \equiv \frac{1}{g}\partial_\mu\theta - i[A_\mu, \theta] \quad (17)$$

となり，電磁場のゲージ変換 (6) と同様に，θ の微分項を含んでいる．このように変換パラメータの微分項を含むことは，ゲージ場の変換の一般的特徴である．

ラグランジアン (13) は，電磁場の場合のラグランジアン (8) とよく似た形をしている．しかし，異なる点もある．最も重要な違いは，場の強さ $F_{\mu\nu}$ に A_μ について非線形な項が存在する点である．この理論では，ゲージ場は行列に値をもつため，交換子がゼロではなく，このような非線形項が可能になっている．このため，ラグランジアンはゲージ場について 3 次や 4 次の項を含む．これらの項は，ゲージ場の自己相互作用を表す．

3. 重力理論

重力の理論である一般相対性理論も局所的対称性をもつ広い意味のゲージ理論とみなすことができる[2,3]．この場合の局所的変換は**一般座標変換**と**局所 Lorentz 変換**であり，ゲージ場は重力場である．

平坦な計量 $\eta_{\mu\nu}$ をもつ Minkowski 時空における場の理論は，場の **Poincaré 変換**に対して不変である．Poincaré 変換は，Lorentz 変換と並進からなり，座標変換 $x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$ に対応する．ここで，$a^\mu{}_\nu$, b^μ は定数の変換パラメータであり，$\eta_{\mu\nu}a^\mu{}_\rho a^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma}$ を満たす．無限小変換の場合は，$a^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \lambda^\mu{}_\nu$ とおくと，$\lambda^\mu{}_\nu$, b^μ が微小な変換パラメータで，$\lambda_{\mu\nu} = -\lambda_{\nu\mu}$ を満たす．例としてスピノール場 $\psi(x)$ を考えると，その無限小 Poincaré 変換は，

$$\delta\psi = \xi^\nu\partial_\nu\psi - \frac{1}{4}\lambda^{\rho\sigma}\gamma_{\rho\sigma}\psi \quad (18)$$

と書ける．ここで，$\gamma_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\gamma_\rho\gamma_\sigma - \gamma_\sigma\gamma_\rho)$ は 2 つのガンマ行列の反対称積であり，

$$\xi^\mu = \lambda^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \quad (19)$$

とおいた．変換のパラメータ $\lambda^\mu{}_\nu$, b^μ は定数であるため，この変換は大局的変換である．ラグランジアン (1) は，この変換に対して全微分項を除いて不変であり，したがって，ラグランジアンを時空について積分して得られる作用は不変である．この理論に重力場を結合させると，ξ^μ, $\lambda_{\mu\nu}$ が任意関数である局所的変換に対して不変な理論になる．

スカラー場やベクトル場などのテンソル場と重力場の結合を考えるときは，重力場として**計量** $g_{\mu\nu}(x)$ を使う．計量と結合した理論は，(19) の ξ^μ を任意関数にした一般座標変換に対して不変である．スピノール場も考えるときは，重力場として**四脚場** $e_\mu{}^a(x)$ $(a=0,1,2,3)$ を使う．計量は四脚場を使って，

$$g_{\mu\nu}(x)=e_\mu{}^a(x)e_\nu{}^b(x)\eta_{ab} \tag{20}$$

と表される．計量が与えられたとき，(20) を満たす四脚場は一意的には決まらない．実際，ある $e_\mu{}^a$ が (20) を満たすとき，

$$e'_\mu{}^a(x)=e_\mu{}^b(x)\Lambda_b{}^a(x), \tag{21}$$

も同じ $g_{\mu\nu}$ に対して (20) を満たす．ここで，$\Lambda_b{}^a(x)$ は，$\Lambda_c{}^a\Lambda_d{}^b\eta_{ab}=\eta_{cd}$ を満たす任意の関数であり，6 個の独立な成分をもつ．変換 (21) は一種のゲージ変換であり，局所 Lorentz 変換とよばれる．このゲージ変換により $4\times4=16$ 個の成分をもつ $e_\mu{}^a$ のうち，10 個の成分をもつ $g_{\mu\nu}$ を表す自由度以外を取り除くことができる．このように，四脚場を使って記述された重力理論は，一般座標変換と局所 Lorentz 変換という 2 種類の局所的変換に対する不変性をもっている．

局所 Lorentz 変換に対して不変な理論をつくるには，ゲージ場が必要である．局所 Lorentz 変換のゲージ場は**スピン接続**とよばれ，$\omega_\mu{}^{ab}(=-\omega_\mu{}^{ba})$ によって表される．スピン接続は独立な場ではなく，捩率条件 $D_\mu e_\nu{}^a-D_\nu e_\mu{}^a=0$ を課すことによって，四脚場を使って表される．これは，計量を使った定式化で Christoffel 記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ が計量を使って表されるのと同様である．スピン接続の場の強さとスピノール場に対する共変微分は，

$$\begin{aligned}R_{\mu\nu}{}^a{}_b&=\partial_\mu\omega_\nu{}^a{}_b-\partial_\nu\omega_\mu{}^a{}_b\\&\quad+\omega_\mu{}^a{}_c\omega_\nu{}^c{}_b-\omega_\nu{}^a{}_c\omega_\mu{}^c{}_b, \qquad (22)\\ D_\mu\psi&=\left(\partial_\mu+\frac{1}{4}\omega_\mu{}^{ab}\gamma_{ab}\right)\psi\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，$\gamma^{ab}=\frac{1}{2}(\gamma^a\gamma^b-\gamma^b\gamma^a)$ は，2 つのガンマ行列の反対称積である．これらの形は，Yang–Mills 場の場合の式 (14) と似た形をしている．場の強さは，Riemann テンソルと $R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma=R_{\mu\nu}{}^a{}_b e_a{}^\rho e_\sigma{}^b$ のように関係している．

四脚場，スピン接続，および，スピノール場の一般座標変換と局所 Lorentz 変換は，

$$\begin{aligned}\delta e_\mu{}^a&=D_\mu\xi^a-(\lambda^a{}_b+\xi^\nu\omega_\nu{}^a{}_b)e_\mu{}^b,\\ \delta\omega_\mu{}^{ab}&=D_\mu\lambda^{ab}+\xi^\nu\partial_\nu\omega_\mu{}^{ab}+\partial_\mu\xi^\nu\omega_\nu{}^{ab}, \qquad (23)\\ \delta\psi&=\xi^\nu\partial_\nu\psi-\frac{1}{4}\lambda^{ab}\gamma_{ab}\psi\end{aligned}$$

と書ける．ここで，$\xi^a=\xi^\mu e_\mu{}^a$, $\Lambda_b{}^a=\delta^a_b+\lambda_b{}^a$ とおいた．$e_\mu{}^a$ と $\omega_\mu{}^{ab}$ の変換は，それぞれ，一般座標変換と局所 Lorentz 変換のパラメータの微分 $\partial_\mu\xi^a$ と $\partial_\mu\lambda^{ab}$ を含んでおり，これらの場がそれぞれの変換のゲージ場であることを表している．スピノール場の局所 Lorentz 変換は，Poincaré 変換 (18) で $\lambda^{\mu\nu}$ を任意関数にした変換になっている．場の強さと共変微分 (22) は，これらの変換に対して共変的に変換する．

重力場とスピノール場が結合した系のラグランジアンは，

$$\mathcal{L}=\frac{1}{16\pi G}e(R-2\Lambda)-e\bar\psi\gamma^\mu D_\mu\psi-me\bar\psi\psi \tag{24}$$

である．ここで，$e=\det e_\mu{}^a=\sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$, $R=e_a{}^\mu e_b{}^\nu R_{\mu\nu}{}^{ab}$, $\gamma^\mu=\gamma^a e_a{}^\mu$ であり，Λ は宇宙定数である．一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対して，このラグランジアンは全微分項を除いて不変である．

4. 超重力理論

超重力理論は，**超対称性**をもつ重力理論である．超対称性は，ボソンとフェルミオンの間の対称性であり，素粒子の統一理論におけるゲージ階層性の問題の解決などのために使われている．場の理論では，ボソンはスカラー場やベクトル場などのテンソル場で表され，フェルミオンはスピノール場で表される．そのため，それらの場を結びつける超対称性変換（超変換）のパラメータはスピノール ϵ_α（$\alpha=1,2,3,4$ はスピノール添字）である．重

力場を含まない素粒子の理論では，ϵ が時空座標に依存しない定数である大局的超対称性が使われる．

大局的超対称性をもつ理論にゲージ場を導入することによって，局所的超対称性をもつ理論をつくることができる．超対称性のゲージ場は，ゲージ変換に変換のパラメータの微分項 $\partial_\mu \epsilon_\alpha$ を含むため，ベクトル添字とスピノール添字をもつ場 $\psi_{\mu\alpha}(x)$ で表される．このような場は，スピン $\frac{3}{2}$ の粒子を表す **Rarita–Schwinger 場**である．矛盾のない理論をつくるためには，さらに別のゲージ場も必要である．大局的超対称性をもつ理論で，2 つの無限小超変換の交換子を計算すると，時空の並進が現れる．したがって，局所的超対称性をもつ理論は，局所的な並進に対する対称性ももつと考えられる．局所的な並進は一般座標変換なので，ゲージ場として重力場も必要である．このように，局所的超対称性をもつ理論は，重力場 ${e_\mu}^a(x)$ と Rarita–Schwinger 場 $\psi_{\mu\alpha}(x)$ をゲージ場として含み，超重力理論とよばれる[4]．

4 次元時空における最小の超対称性をもつ超重力理論のラグランジアンは，

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = eR + 6m^2 e - \frac{1}{2}e\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_\rho \\ + \frac{1}{2}me\bar{\psi}_\mu \gamma^{\mu\nu}\psi_\nu + \mathcal{L}_{\text{matter}}\end{aligned} \qquad (25)$$

と書ける．簡単のため，万有引力定数を $16\pi G = 1$ とした．ここで，$\gamma^{\mu\nu\rho}$, $\gamma^{\mu\nu}$ は，ガンマ行列の反対称積，m は実定数である．初めの 4 つの項は，順に，Einstein 項，宇宙項，Rarita–Schwinger 場の運動項，質量項である．最後の $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ は，物質場を含む項である．宇宙項を (24) と比較すると，Rarita–Schwinger 場の質量パラメータ m によって決まる負またはゼロの宇宙定数 $\Lambda = -3m^2$ をもつことがわかる．このラグランジアンは，局所超変換に対して，全微分項を除いて不変である．ゲージ場である四脚場と Rarita–Schwinger 場の局所超変換は，

$$\begin{aligned}\delta {e_\mu}^a &= \frac{1}{4}\bar{\epsilon}\gamma^a \psi_\mu, \\ \delta\psi_\mu &= \left(D_\mu + \frac{1}{2}m\gamma_\mu\right)\epsilon + \cdots\end{aligned} \qquad (26)$$

である．ここで，$\cdots$ は物質場を含む項を表す．また，ラグランジアン (25) は，一般座標変換と局所 Lorentz 変換に対しても，全微分項を除いて不変である．

5. 場の方程式の解の対称性

以上のように，大局的対称性をもつ理論にゲージ場を導入することによって，局所的対称性をもつ理論をつくることができる．逆に，局所的対称性をもつ理論において，場の方程式の解の対称性として大局的対称性が現れる場合がある．

例として，重力理論を考えよう．ラグランジアン (24) から導かれる重力場の方程式は，

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \qquad (27)$$

である．$T_{\mu\nu}$ は，スピノール場のエネルギー・運動量テンソルである．この方程式の 1 つの解を ${\bar{e}_\mu}{}^a$ として，その解のもつ対称性を考える．簡単のため，$T_{\mu\nu} = 0$ であるとする．この解が変換 (23) に対して不変であるとすると，変換パラメータに対する条件

$$\begin{aligned}&\bar{D}_\mu \xi_\nu + \bar{D}_\nu \xi_\mu = 0, \\ &\lambda_{ab} = -\frac{1}{2}(\bar{D}_a \xi_b - \bar{D}_b \xi_a) - \xi^\nu \bar{\omega}_{\nu ab}\end{aligned} \qquad (28)$$

が得られる．ここで，$\xi_\mu = \bar{g}_{\mu\nu}\xi^\nu$, $\xi_a = \bar{e}_{\mu a}\xi^\mu$ である．初めの方程式は，一般座標変換のパラメータ ξ^μ に対する条件で，その解は **Killing ベクトル**とよばれる．2 つ目の方程式は，局所 Lorentz 変換のパラメータ λ_{ab} を ξ^μ を使って表す式である．Killing ベクトルが存在すれば，この解 ${\bar{e}_\mu}{}^a$ は，これらのパラメータをもつ変換に対して不変である．このような対称性を，この時空のアイソメトリという．

$\Lambda = 0$ の場合の 1 つの解は，Minkowski 時空 ${\bar{e}_\mu}{}^a = \delta_\mu^a$ である．この場合の (28) の解を求めると，一般解は (19) である．したがって，この解は大局的な Poincaré 変換に対する対称性をもつ．$\Lambda > 0$ の場合と $\Lambda < 0$ の場合には，それぞれ，de Sitter 時空と反 de Sitter 時空の解がある．これら

の時空には10個のKillingベクトルが存在し，解の対称性は，それぞれ，$SO(2,3)$ と $SO(1,4)$ である．一般に，D 次元時空に存在し得るKillingベクトルの最大の個数は $\frac{1}{2}D(D+1)$ であり，その場合の時空を極大対称空間とよぶ．Minkowski時空，de Sitter時空，反de Sitter時空はすべて極大対称空間である．極大対称空間の特徴の1つは，Riemannテンソルが計量を使って

$$\bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{3}\Lambda(\bar{g}_{\mu\rho}\bar{g}_{\nu\sigma} - \bar{g}_{\mu\sigma}\bar{g}_{\nu\rho}) \tag{29}$$

と表されることである．

Minkowski時空と反de Sitter時空は，超重力理論(25)の場の方程式で，重力場以外の場をゼロとした場合の解にもなっている．超重力理論では，一般座標変換と局所Lorentz変換の他に，局所超変換に対する不変性も考えることができる．超変換(26)に対して場の方程式の解が不変になっているかどうか調べよう．四脚場の変換 $\delta\bar{e}_\mu{}^a$ は，Rarita–Schwinger場 ψ_μ がゼロなので，自動的にゼロになっている．Rarita–Schwinger場の変換 $\delta\psi_\mu$ がゼロであるとすると，変換のパラメータ ϵ に対する条件

$$\left(\bar{D}_\mu + \frac{1}{2}m\bar{\gamma}_\mu\right)\epsilon = 0 \tag{30}$$

が得られる．この方程式の解は**Killingスピノール**とよばれる．Killingスピノールが存在すれば，場の方程式の解は大局的超対称性をもっている．方程式(30)が解をもつためには，積分可能条件

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\bar{D}_\mu + \frac{1}{2}m\bar{\gamma}_\mu, \bar{D}_\nu + \frac{1}{2}m\bar{\gamma}_\nu\right]\epsilon \\ &= \frac{1}{4}\left(\bar{R}_{\mu\nu}{}^{ab} + 2m^2\bar{e}_\mu{}^a\bar{e}_\nu{}^b\right)\gamma_{ab}\epsilon \end{aligned} \tag{31}$$

が成り立つことが必要である．Minkowski時空と反de Sitter時空の場合は，性質(29)を使うと，この条件が自動的に満たされていることがわかる．実際，この2つの時空に対して4つの独立なKillingスピノールが存在することが確かめられている．特に，Minkowski時空の場合のKillingスピノールは定数スピノールである．2つのKillingスピノール ϵ_1, ϵ_2 を使ってベクトル $\xi^\mu = \bar{\epsilon}_1\bar{\gamma}^\mu\epsilon_2$ をつくると，それは(28)を満たすKillingベクトルであることがわかる．この関係を使うと，解の対称性であるアイソメトリの変換と超変換は，交換関係に関して閉じた超代数をつくることが示される．そのような超代数は，Minkowski時空の場合は超Poincaré代数，反de Sitter時空の場合は $OSp(1|4)$ 超代数とよばれる．

Yang–Mills理論の場合にも，場の方程式の解 $\bar{A}_\mu$ が与えられた場合，それを不変に保つ局所的変換から解の大局的対称性を求めることができる．ゲージ場の不変性から，変換のパラメータ θ に対する条件 $\bar{D}_\mu\theta = 0$ が得られる．他の場もある場合は，それらの場も不変になっている必要がある．例えば，素粒子の標準理論においては，真空解はスカラー場がゼロではない値をもち，そのため電弱相互作用のゲージ群 $SU(2)\times U(1)$ のうち，その部分群である $U(1)_{\rm em}$ だけが真空の対称性となっている．

6. 保存チャージ

このように大局的対称性をもつ場の方程式の解がある場合に，空間的無限遠で漸近的にその解に近づくような場を考えよう．そのとき，解の大局的対称性に対応する保存チャージを以下のように構成することができる[5,6]．

例として，重力場の理論を考えよう．計量 $g_{\mu\nu}$ を，場の方程式の解である背景場 $\bar{g}_{\mu\nu}$ とそこからの変位 $h_{\mu\nu}$ の和として，

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{32}$$

と表す．$h_{\mu\nu}$ は空間的無限遠で0に近づくとする．以下では，背景場についての量をバー（$^-$）をつけて表す．また，添字の上げ下げは，背景計量を使って行う．重力場の方程式(27)の左辺を $h_{\mu\nu}$ について展開して，2次以上の項を右辺に移項すると，

$$\begin{aligned} &\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}\right)^{(1)} \\ &= 8\pi G\left(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

が得られる．ここで，左辺の (1) は $h_{\mu\nu}$ について 1 次の項を取り出すことを表す．また，$T_{\mu\nu}$ は重力場以外の場の対称エネルギー・運動量テンソル，$t_{\mu\nu}$ は左辺から移項した $h_{\mu\nu}$ の 2 次以上の項である．$t_{\mu\nu}$ は，重力場のエネルギーや運動量の密度を表す量であるが，一般座標変換に対してテンソルとしては変換しないため，**エネルギー・運動量擬テンソル**とよばれる（エネルギー・運動量擬テンソルには，これ以外にもいろいろな定義の仕方がある．これは，等価原理によって任意の点の重力をゼロにすることができるため，重力場の局所的なエネルギーや運動量の密度の自然な定義が存在しないからである[7]）．この方程式の左辺に，背景場に関する共変微分 $\bar{D}^\mu$ を作用すると，恒等的にゼロになることが示される．したがって，

$$\bar{D}_\mu (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0 \tag{34}$$

が成り立つ．背景場に対する Killing ベクトル ξ^μ を使って，カレント

$$J^\mu = (T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu})\, \xi_\nu \tag{35}$$

を定義すると，(34) と (28) から（共変微分ではなく）偏微分を使った連続の方程式 $\partial_\mu(\bar{e}J^\mu) = 0$ が成り立つことがわかる．したがって，チャージ

$$Q[\xi] = \int d^3\boldsymbol{r}\, \bar{e} J^0 \tag{36}$$

が保存する．これが，背景場の対称性に対応する保存チャージである．

このチャージの積分は，空間的無限遠における表面積分の形に書き換えることができる．(33) の左辺を使って計算すると，

$$\begin{aligned} Q[\xi] \;=\; & \frac{1}{8\pi G} \int dS_i\, \bar{e}\, (\bar{D}_\nu K^{0i\mu\nu} \xi_\mu \\ & - K^{0j\mu i} \bar{D}_j \xi_\mu) \end{aligned} \tag{37}$$

が得られる．ここで，$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu} h^\rho{}_\rho$ として，

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; & \frac{1}{2}(\bar{g}^{\mu\sigma} H^{\nu\rho} + \bar{g}^{\nu\rho} H^{\mu\sigma} \\ & - \bar{g}^{\mu\nu} H^{\rho\sigma} - \bar{g}^{\rho\sigma} H^{\mu\nu}) \end{aligned} \tag{38}$$

であり，積分は無限遠における 2 次元球面上で行う．したがって，重力場の漸近的振舞いによってチャージの値が決まる．これは，電磁気学において全電荷を電場の面積積分によって表す式 $Q = \int d\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{E}$ と同様な式である．背景場が Minkowski 時空（$\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$）の場合，Killing ベクトルは (19) であり，保存チャージとして Lorentz 変換の生成子と 4 元運動量が得られる．特に，時間方向の並進の Killing ベクトルから，よく知られているエネルギーの表式[8]

$$E = \frac{1}{16\pi G} \int dS_i\, (\partial_j h_{ij} - \partial_i h_{jj}) \tag{39}$$

が得られる．

Yang–Mills 理論や超重力理論においても，ゲージ場の場の方程式を使って，同様に保存チャージを構成することができる．Killing ベクトルに対応するものは，超重力理論では (30) を満たす Killing スピノール ϵ であり，Yang–Mills 理論では $\bar{D}_\mu \theta = 0$ を満たすゲージ変換のパラメータ θ である．これらの場合も，保存チャージを無限遠における表面積分の形に表すことができる．

参考文献

1) C.N. Yang and R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
2) R. Utiyama, *Phys. Rev.* **101**, 1597 (1956).
3) T.W.B. Kibble, *J. Math. Phys.* **2**, 212 (1961).
4) D.Z. Freedman and A. van Proeyen, “Supergravity” (Cambridge Univ. Press, 2012).
5) S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology” (Wiley, 1972).
6) L.F. Abbott and S. Deser, *Nucl. Phys.* **B195**, 76 (1982); *Phys. Lett.* **B116**, 259 (1982).
7) C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, “Gravitation” (Freeman, 1973).
8) R.L. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, in “Gravitation: An Introduction to Current Research”, ed. L. Witten (Wiley, 1962) (*Gen. Rel. Grav.* **40**, 1997 (2008) [gr-qc/0405109]).

（たにい・よしあき，埼玉大学大学院理工学研究科）

弦理論における時空非局所性とは何か

米谷　民明

（超）弦理論とは何だろうか．粒子を点として扱う局所場の理論に比べて最も特徴的なことは，もちろん，弦 (string)，つまり，1次元的に広がった自由度が基本的な役割を果たすということだ．その意味で弦理論は必然的に「非局所的」である．この観点から弦理論の考え方を解説する*1)．

1. 局所場の量子論は点粒子の理論

これまで確立した物理学の最もミクロレベルでの基本法則である量子論に従う素粒子の標準ゲージ理論（電弱相互作用のワインバーグ–サラム理論＋量子色力学），および，重力を古典的に取り扱って宇宙のマクロ的構造を記述する標準理論としての一般相対性理論は，どちらも，[**i**：基本自由度としての場（場の強さや向きが時空の点ごと変動しエネルギーや運動量に寄与する）が時空の広がりのない1点ごとに定義されている理論] である．電磁場ならポテンシャル $A^\mu(x)$（時空次元を D，添字 $\mu = 1, 2, \ldots, D-1, 0$ は時空のベクトル，x は時空座標 x^μ を添字を略してまとめて表したもの，空間成分のベクトルだけを表すには太文字記号 $\boldsymbol{x}$ を用いる）の場だ．普通の4次元 $D = 4$ で考えるなら，空間成分 $\mu = 1, 2, 3$ で磁場を表すベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(x)$ ($\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$)，時間成分 $\mu = 0$ がスカラーポテンシャル $\phi(x)$ である ($\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\phi$)．重力場なら，時空の無限小離れた2点 $(x^\mu + dx^\mu, x^\mu)$ 間の不変距離 ds を表す計量テンソル $g_{\mu\nu}(x)$ ($ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$) である．これは，ユークリッド幾何学とその拡張として成り立つ特殊相対性理論の不変距離 ds ($ds^2 = |d\boldsymbol{x}|^2 - dt^2$, $x^0 = t$) を，一般の曲がった時空間に任意の座標系を許す形で拡張したものだ．

局所場の理論では，さらに [**ii**：場の伝播の力学が有限階の時空微分によって支配される]．有限階と言っても，ニュートンの運動方程式が時間に関して2階の微分方程式であるのと同様な意味で，時空座標について2階までとしなければ，確率保存に関して困難があるので，2階までを前提として話を進める（標準理論でも一般相対性理論でも満たされている）．いずれにしても要請 [**ii**] は，局所場の作用が時空の無限小の領域だけで起こるということだ．従って，有限な距離だけ離れた空間の2点間での物理的な作用は，その間の距離に応じてゼロではない有限時間をかけて伝達する．

さて，量子力学では，物理量はすべて何らかの意味で状態を表す関数（波動関数，あるいは状態関数と呼ぶ）に対する作用を及ぼす演算子である．例えば，粒子の量子力学では，状態関数は，すべての粒子の座標と時間の関数で，粒子の位置という物理量は，状態関数に粒子の座標をかけて新しい状態関数を作り出す演算子である．また，運動量は座標に関する微分演算子の $-i$ 倍だ．当然，場の量子力学（場の量子論）では，場そのものが演算子で，具体的には，時空の1点で場に対応する

*1) 以下数式の煩雑化を避けるため，光速度 c とプランク定数 $\hbar = h/2\pi$ を1とする単位（自然単位）を用いる．

粒子（場の量子）を創（生成す）るか消す（消滅させる）かのどちらかの作用を引き起こす．局所場の量子論は必然的に，広がりない粒子の理論であり，逆に相対論的な点粒子の量子論は，局所場の理論なのだ．

粒子間の力は，量子場の作用によって物質の構成要素の間で，力に対応する場の量子としての粒子をやり取りする効果であり（電磁場の量子は光子，強い相互作用ではグルーオン，弱い相互作用では $W^{\pm}$，Z 粒子），その性質はすべて場の量子の性質に帰着させて説明できる．それを重力を除いて成し遂げたのが標準ゲージ理論だ．もし，一般相対性理論も量子論で扱うとすると，重力は，重力場の量子＝重力子の生成消滅に伴って起きるエネルギー運動量そのものの間で起こる重力子の交換作用である．場とその量子の関係は，力の場だけではなく，核子（陽子や中性子）の構成要素であるクォーク，そして核子の周りに分布して原子を構成する電子，さらには中性子のベータ崩壊で生じるニュートリノなどにも同様に成り立つ．ただし，力の場の量子は，スピン（粒子固有の角運動量の大きさ）が（ゼロを含む）整数だが，後者の場合は半整数という違いがある．前者をボース粒子，後者をフェルミ粒子と呼ぶ．以降は議論の単純化のため，特に断らない限り，ボース粒子で考えよう．要するに以下にとって重要なことは，局所場の自由度が時空の各点における粒子の生成消滅の自由度に他ならないということだ．

例えば，2 個の粒子の散乱過程，つまり，無限に過去から入射した 2 粒子（番号 1, 2）が相互作用を起こしてある時間経過した後（塗りつぶし部分）に再び 2 粒子状態（番号 3, 4）に帰って無限の未来に去ってゆくという場合を考えてみよう（図 1）．粒子の生成消滅過程の立場からは，その最も単純な描像は図 2 のようなものだ．太線部分が生成消滅する粒子の伝播を表す．[2a], [2b], [2c] は 1 個の粒子の生成消滅による寄与であり，[2d] は入射粒子が直接に接触相互作用を起こす場合だ．太線部分のように，相互作用中の有限時空間隔だけ伝播する粒子を一般に仮想粒子と呼ぶ．量子力学の不確定性関係により，仮想粒子は運動量やエネルギーが確定していない状態にある．質量が m の粒子が確定した D 元運動量（$p^\mu = (\boldsymbol{p}, E), E = p^0$）を持っているなら，相対論的質量条件 $p^2 = |\boldsymbol{p}|^2 - (p^0)^2 = -m^2$ を満たさなければならないが，時空座標をフーリエ変換して仮想粒子を D 元運動量 p^μ を指定して扱う（運動量表示）と，この不確定性のため，仮想粒子は**質量条件を満たさない粒子であるかのよう**に振る舞う．例えば，仮想粒子が時空点 x と y 間を伝播したときの確率振幅（図 3，ファインマン伝播子）は次式である．

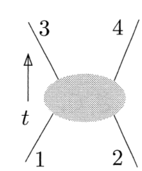


図 1

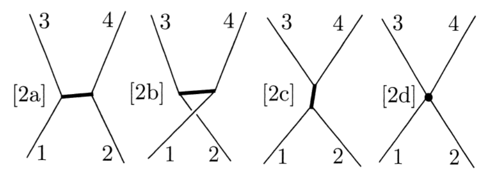


図 2　2 粒子散乱の木近似：4 個の異なるタイプがある．

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) = -i\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D}\frac{e^{ip(x-y)}}{p^2+m^2-i\epsilon} \qquad (1)$$

（$p(x-y) = \boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) - p^0(t_x - t_y)$ は D 次元不変内積，ϵ は正の微少量で最終的な振幅を計算した後でゼロの極限を取る）．つまり，運動量空間の確率振幅は $1/(p^2+m^2-i\epsilon)$ 因子を必ず含む．あるいは，時間を純虚数とし，物理量を計算した後に実数に解析接続するユークリッド化の方法では，p^0 も純虚数と仮定でき，p^2 は D 次元ユークリッド空間の不変長さの 2 乗に等しい正の量として扱い，ϵ は無視して $1/(p^2+m^2)$ だ．また，この粒子に対応する場の演算子を $\phi(x)$ で表すと（簡単のため，スピンがゼロの実スカラー場とする），ファインマン伝播子は次式に等しい．

$$\Delta_{\mathrm{F}}(x-y) = \begin{cases} \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle & (t_x > t_y), \\ \langle 0|\phi(y)\phi(x)|0\rangle & (t_y > t_x). \end{cases} \qquad (2)$$

ただし，$|0\rangle, \langle 0|$ はそれぞれ初期状態と終状態が粒子が存在しない「真空」であることを示す．演算

の順序は時間に関して右から左に進み，1 行目は時空点 x で粒子が生成，y で消滅する過程，2 行目はその順序が逆転した過程だ．

このとき，もし 2 点が空間的距離 $(x-y)^2 > 0$ にあるなら，時間順序は慣性系の変更で（時間の同時性 $t \leftrightarrow t'$ が変わり）逆転できるが（図 3），ファインマン伝播子は同じでローレンツ不変性が成り立つことは，次の交換関係（局所可換性 or 因果性条件）が保証する．

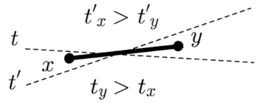


図 3

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad (x-y)^2 > 0. \tag{3}$$

実際の振幅は伝播子と，仮想粒子の生成消滅そのものの振幅で伝播子の両端に対応する「頂点」の積で表せる．後者は D 元運動量に関してラグランジアンの相互作用項の微分階数で決まる次数の多項式で，その強さを表す結合定数に比例する．

一方，細線（外線）で表された入射粒子，散乱粒子は無限に長い時空間隔を伝播することに対応して，エネルギー運動量は質量条件を満たして確定でき，通常の波動関数 $e^{ipx} = e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x} - p^0 t_x}$, $p^0 = E = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$ で表せる．相対論的な運動量空間の利点は，今前提としているミンコフスキー時空が一様であるという対称性からの必然的帰結として，D 元運動量が粒子の生成消滅過程で常に保存されることである．例えば，外線の D 元運動量を p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ で表すと，寄与 [2a] の仮想粒子の D 元運動量を左から右に流れるとして表すと，$p_1 - p_3$ である．右から左なら $p_2 - p_4$ だ．定義により $p_1 - p_3 = -(p_2 - p_4)$ で，全体での D 元運動量の保存則 $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ が満たされる．

一般にこのように時空での粒子の軌跡を図（ファインマングラフ）で表して様々な過程の確率振幅を計算する方法を摂動論という．図 2 は，特に，時空における粒子伝播のループを含まない形なので，「木」近似と呼ばれる．摂動論で量子力学の確率保存則（ユニタリ性）を満たすには，仮想粒子の生成消滅過程として可能なあらゆる寄与を考

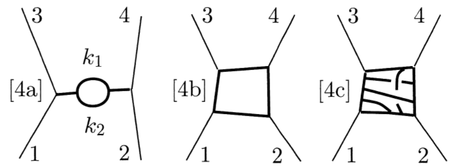


図 4　ループグラフ．

慮して加えなければならない．木近似では仮想粒子の D 元運動量は外線の運動量によって決まるが，ループを含むと，ループの個数 $(a = 1, \ldots, n)$ に等しい D 元運動量が定まらない．これをループ運動量と呼び，記号 ℓ_a^μ で表そう．ループ運動量はすべて同等に重ね合わせる，すなわち，積分 $(\prod_{a=1}^n \int \frac{d^D \ell_a}{(2\pi)^n})$ しなければならない．例えば，図 2 と同じ外線を持つ最も単純なループグラフとして図 4[4a]（$n = 1$）を考えると，ループを構成する 2 個の伝播子の運動量は（左から右への流れとして）$k_1 = p_1 - p_3 + \ell_1$, $k_2 = -\ell_1$ と表せる．ループ運動量は $-\infty$ から $+\infty$ が可能であるため，振幅への寄与（簡単のためユークリッド形式で，質量は同じとする）は次の積分を含む．

$$\int \frac{d^D \ell_1}{(2\pi)^D} \frac{P(p, \ell_1)}{((p_1 - p_3 + \ell_1)^2 + m^2)(\ell_1^2 + m^2)}. \tag{4}$$

分子の $P(p, \ell_1)$ は，頂点の形から決まる多項式で，相互作用ラグランジアンが 2 階の微分を含むなら，2 頂点の積の寄与として ℓ_1 について 4 次まで可能だ．実は，(4) は $D \geq 4$ なら必ず発散する．これが局所場の理論では避けられない紫外発散の困難の最も簡単な例である．より複雑なグラフでは発散の出方も複雑になるし，当然，相互作用ラグランジアンの微分階数が高いほどよりきつい発散だ．標準理論の相互作用項の微分階数は，高々 1 階までであることとゲージ対称性のため，観測可能量の間の関係として表すと，表面的には紫外発散が打ち消し，有限個の物理定数の再定義により発散が現れない．これを繰り込み可能という．しかし，一般相対性理論をこの方法で扱うと，重力がエネルギー運動量と結合する（等価原理）結果として必然的に 2 階微分を含み，無限個の物理定数が必要になる．これでは意味のある理論ができ

ない．つまり，一般相対性理論は繰り込み不可能である．

2. 弦理論の非局所性とはどんなものか

最小限の準備ができたので弦理論に進む．まず閉じた輪のような形の弦で考えると，例えば，図 2 の木グラフの寄与が，弦理論では図 5 の 1 個のグラフで，図 4[4a], [4b] で例示される 1 ループグラフでは図 6 の 1 個のグラフで置き換わる．つまり，点粒子が時空で描く伝播子とヴァーテックスの結合からなる線（世界線）が，閉じた弦が時空で描く面（世界面）に変更される．従って，局所場理論の前提 [**i**] の代わりに，弦理論では，[Ⅱ：基本自由度が 1 次元的にのみ広がりを持つ線（弦）上で定義される]．もちろん，弦の力学は量子力学に従い，局所場理論の要請 [**ii**] に代わる（共形）対称性の条件の下で許されるあらゆる揺らぎが寄与する．

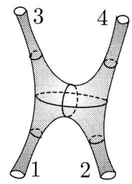


図 5

図 5, 6 に世界面を輪切りして表した閉曲線は，量子的揺らぎで現れる得る様々な時刻ごとの弦を示す．もし，この輪が無限に小さくつぶれた寄与だけを取り出せば，図 2, 4 の木グラフや 1 ループグラフを特別な場合（点粒子極限）として含む．また，ループと外線の個数が同じなら，すべての点粒子ファインマングラフが世界面の連続的な変形によって互いにつながる．

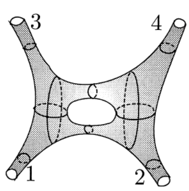


図 6

共形対称性：世界面の力学の対称性

世界面を具体的に扱うには，面に 2 次元の座標系を用意する．それを τ で時間方向，σ で空間方向に目盛りを振って表し，世界面上の座標 (τ,σ) での時空位置を，D 個の関数により $x^\mu(\tau,\sigma)$ と表す．運動方程式として自明でない最も簡単な形は，読者にも馴染み深いひもの振動の波動方程式だ．

$$\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\sigma^2}=0. \tag{5}$$

閉じた弦なら，変数 σ を適当に選んで，周期性 $x^\mu(\tau,\sigma)=x^\mu(\tau,\sigma+2\pi)$ を満たすと仮定できる．もし $x^\mu(\tau,\sigma)$ が σ によらないなら，第 2 項が消え $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}=0$ となり，自由な点粒子の相対論的運動方程式に帰着する．実際，伝播子 (1) は，この運動方程式に基づく量子力学から自然に導ける．

さて，(5) 式は，次の変換（共形変換）で不変という対称性を持つ（以下，複合同順）．

$$\tau\pm\sigma\to\tau'\pm\sigma'=f_\pm(\tau\pm\sigma). \tag{6}$$

$f_\pm$ は 2 つの独立な微分可能な任意関数である．これに対応し，弦の運動には 2 個の拘束条件（ローレンツスカラー）を課せる．

$$T_{\pm\pm}\equiv\frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\pm\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)^2=0. \tag{7}$$

これらを正準形式で扱うと，$T_{\pm\pm}$ は実は変換 (6) の無限変換の生成子であることが分かるので，拘束条件は共形変換の下で力学が不変であるという要請に他ならない．「共形」の意味は，2 次元の計量が局所的にスケールが任意に変化するが，「角度」が変化しないということだ（$\tau_\pm\equiv\sigma\pm\tau$）．

$$d\tau_+d\tau_-\to d\tau'_+d\tau'_-=\frac{df_+}{d\tau_+}\frac{df_-}{d\tau_-}d\tau_+d\tau_-. \tag{8}$$

複素関数論を学んだ読者には，時間を純虚数（$\tau\Rightarrow -i\tau, x^0\to -ix^0$，ユークリッド化）にした方式で表すと分かりやすいだろう（$z=\sigma+i\tau, \bar{z}=\sigma-i\tau$）．

$$dzd\bar{z}\to dz'd\bar{z}'=\left|\frac{df}{dz}\right|^2dzd\bar{z}. \tag{9}$$

$f(z)$ は任意の正則関数である．その意味で，弦の量子力学はリーマン面上の場の理論とも言える．

運動方程式 (5) の一般解は，2 個の任意関数 $x^\mu_\pm$ により，$x^\mu=x_+(\tau_+)+x_-(\tau_-)$ と書け，右進行波 x_+ と左進行波 x_- の振動モードの重ね合わせである．条件 (7) により，それぞれが条件 $\left(\frac{dx_\pm(\tau_\pm)}{d\tau_\pm}\right)^2=0$ を満たす．もちろん，同じことがユークリッド化したときの正則関数としての解について言える．このことから物理的に独立な自由度は，右左進行モードごとに $D-2$ 個である．1 個は共形変換の自由度に帰着するから物理的自由度（時間に対応）ではなく，さらに拘束条件のため，もう 1 個独立

な自由度が減る（$D \Rightarrow D-2$）のだ．空間運動で言えば，弦に垂直な「横」自由度だけが独立で，弦の接線方向の自由度は，横自由度に従属して決まる．[Ⅲ：弦理論が点粒子の理論と違って統一理論として相応しい性質を持つのは，ほとんど，この共形対称性に起源がある]．そうした性質のうち最も重要なものをまとめよう．

a) 運動と相互作用の統一：世界面を局所的に見ると分岐はなく常に自由運動である．しかし，全体としてみると，外線の個数とループの個数で決まる点粒子のファインマングラフを極限として含むので，相互作用を記述している．つまり，世界面の力学は粒子状態のスペクトルとその相互作用を同時に記述する．これに対し，点粒子では自由運動に対応する伝播子と相互作用に対応する頂点を別々に与えなければならない．弦のスペクトルとしての粒子状態と相互作用の対応関係は，弦の世界面で十分に長い時空距離にわたって伝播する弦を表す筒領域（$-\infty < \tau < 0$）を取り出しユークリッド化して考えると（図 7），共形変換（等角写像 $z = e^{\tau + i\sigma}$）によりガウス平面の円盤領域に写像できることからも理解できる．こうすると，筒領域に対応し弦が無限に長い時空距離を伝播する結果が，円盤領域の原点に演算子を挿入させて相互作用を引き起こすのと同等だ．この演算子を世界面の頂点演算子と呼ぶ．つまり，相互作用を表す頂点演算子が弦の状態スペクトルと 1 対 1 の対応関係（頂点/状態対応）にある．

また，振幅の全体としての大きさ，言い換えると相互作用の強さは，ただ 1 個の結合定数 g により世界面のトポロジーを指定するオイラー数 $\chi = 2 - 2h - k$（h：世界面のループ数，k：外線数）で決まり，$g^{-\chi}$ に比例する．図 5：$h=0$，図 6：$h=1$，より複雑な世界面，例えば，[4c] に対応する図 8 では $h=5$ だ（いずれも $k=4$）．これは，上に述べた世界面と点粒子極限でのファインマングラフとの対応から導け，点粒子で伝播子 n 本が集まる頂点の結合定数が g^{n-2} であるのに相当する．

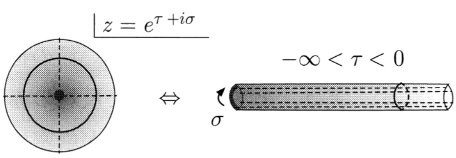


図 7　頂点（z 平面の原点）/状態（$\tau \to -\infty$）対応．

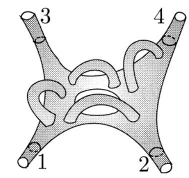


図 8

b) 重力の存在を予言：閉じた弦のスペクトルに必然的に重力子が現れる．理由は，拘束条件を満たす量子状態で最初に現れる時空の 2 階テンソルは，左右進行波が 1 個ずつ励起した状態であるためだ．その物理的自由度数は，$(D-2)^2$ だが，テンソル添字の対称性に基づいた既約分解 $(D-2)^2 = \frac{D(D-3)}{2} + \frac{(D-2)(D-3)}{2} + 1$ が D 次元時空のローレンツ群の 2 階テンソル表現の既約分解と一致するのは，状態の質量がゼロのときのみである．最初の項が対称テンソル場で一般相対性理論と同じ対称性を持つ場，すなわち計量テンソル $g_{\mu\nu}$ の自由度に対応する．つまり，対称テンソルの自由度 $\frac{D(D+1)}{2}$ から一般座標変換の対称性に対応して消去される自由度数 D と拘束条件の個数 D の数を考慮して $2D$ 個の物理的自由度が減り $\frac{D(D+1)}{2} - 2D = \frac{D(D-3)}{2}$ が成り立つ．これが，$D-2$ 次元の既約分解で現れる対称（トレースゼロ）部分の自由度数 $\frac{(D-2)(D-1)}{2} - 1$ に一致するのだ．同様に，第 2 項は反対称テンソル場 $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$ でゲージ対称性 $B_{\mu\nu} \to B_{\mu\nu} + \partial_\mu \Lambda_{nu} - \partial_\nu \Lambda_\mu$ を備えた場に，最後の項はスカラー場 Φ（ディラトンと呼ばれる）に対応する．ディラトン場の世界面での現れ方を調べると，その真空期待値 $\langle \Phi \rangle$ が結合定数 g を決める（$g = e^{\Phi}$）ことが分かる．

さらに，この対称 2 階テンソル状態が実際に弦が運動する時空の計量テンソルの場に他ならないことは，時空の計量テンソルをミンコフスキー空間から無限小変形して得られる弦の世界面の振幅が，この状態を外線として加えた振幅と一致することから分かる．また，この状態のゲージ変換との相殺効果により，世界面上に 2 次元保存流 $T_a = v_\mu(x) \partial_a x^\mu$（$a = 0 \leftrightarrow \tau, a = 1 \leftrightarrow \sigma$）が現れ，時空の無限小一般座標変換 $x^\mu \to x^\mu + v^\mu(x)$ の下での対称性（た

だし，今の近似では $\partial^2 v_\mu=0, \partial_\mu v^\mu=0$ で，線形化された一般座標不変性）が導かれる．一般相対性理論では，重力相互作用が等価原理と一般座標不変性の要請から生じるが，弦理論では，共形対称性に支配された非局所性の結果として現れる．弦理論はよく背景時空独立性がないと言われるが，そうではなく，[IIII：弦の振動モードそのものが，背景時空を変形する自由度であって，原理的には背景独立な理論構造をしている]．共形対称性に支配されている背景時空自体の力学を，摂動論によらない形式に持ってゆくことが大きな課題である．

c) 臨界時空次元： 質量ゼロ状態が弦の相対論的な量子力学と矛盾しないためには，実は時空次元が特別な値，ボース粒子だけの理論（ボソン弦）の場合は $D=26$，また，フェルミ粒子との超対称性を取り入れた場合（超弦）には，$D=10$ でなければならない．これは，(7)（および超弦の場合は，それを含む拡張された拘束条件）が弦の状態に対する拘束条件として，量子力学のゼロ点振動の寄与を含むためである．ひも振動の古典力学を学んだ読者には想像がつくように，弦の振動の量子力学は，無限個の（異なる振動数に対応する）調和振動子の系として扱える．従って，そのエネルギーにはゼロ点振動が寄与し，一見，エネルギーは常に無限大になってしまうように思えるだろう．しかし，共形対称性という無限に大きな対称性の結果として，無限個のゼロ点振動によって有限なエネルギーが得られる．数学的にはゼータ関数の次の性質（オイラーの式）が活躍する．

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1} n^{-s}, \quad \zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \qquad (10)$$

例えば，ボソン弦の臨界次元は，重力子のスピン 2（第 1 項）からの寄与とゼロ点エネルギー（第 2 項）が相殺して質量ゼロが実現する条件 $2+(D-2)\zeta(-1)=0$ から決まる．

しかし，ボソン弦ではこのことの裏返しとして，スピンゼロの基底状態の質量が純虚数になる（タキオン）困難が生じる．重力子状態を保ってタキオン状態を消去するには，時空の超対称性（ボソンとフェルミオンが対称的に存在する）が必要になる．それには弦の自由度として，弦の上に住み，$x^\mu(\tau,\sigma)$ とパートナーになるようなフェルミオン自由度が必要になる．もちろん，このとき共形対称性を厳密に保ち，フェルミオン自由度を含んで拡張されることが重要である．こうして構成されるのが，超弦理論である．臨界次元は，一見，現実の宇宙が我々には $D-1=3$ 次元（＋時間 1 次元）であるのと矛盾するが，むしろ，弦が支配する最もミクロな宇宙の次元を予言しているのだ．そこから大きな宇宙を生成し 3 次元を導出できる可能性を示唆していると解釈できる．

d) 紫外発散の解消： 点粒子の 1 ループグラフが式 (4) のように発散するのは，運動量 ℓ_1 が無限大（波で言えば波長が無限小で紫外領域）になる寄与のためである．伝播子の運動量が大きいところは，(1) 式から分かるように，仮想粒子の時空の伝播距離が小さいところに対応する．つまり，仮想粒子のループが時空の限りなく小さな領域の寄与を含むためである．弦理論では，[IV：共形不変性のため，世界面のループは必ず有限な大きさの時空領域を占める] ことが次の考察から分かる．最も簡単な場合として図 9[9a] のようなドーナツ型の世界面を（ユークリッド化して）考える．2 つの互いに交差する線 A, B で裂いてできる長方形で，相対する辺どうしを同一視したもの（[9b]）と同じである（リーマン面の立場からは，辺を同一視するとき適当な距離だけずらす自由度もあるが，ここでは簡単のため，ずらし距離はゼロとして考える）．ここで肝心なのは，共形不変性のため，[9b] 全体の拡大縮小は物理量には反映しないということだ．従って物理量に反映するのは辺の長さの比 $L \equiv \frac{|A|}{|B|}$ だけであり，物理量を発散させるような寄与が起こり得るのは L が無限大か無限小のどちらかだ（[9b] と [9c] を比較すれば納得できる．数学的には共形不変量としての「極値的長さ」extremal length に相当する）．しかし，これは実際の時空の長さで言うなら，A 方向か B 方向のどちらかに無限に細い筒の世界面に他ならず，実は，どちらも紫外と反対の赤外領域なのである．従って，共形不変性が厳密に満たされている（臨界次元ではそれが保証される）限り，

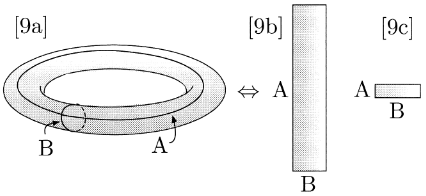


図 9 ドーナツ型世界面と共形不変性.

弦理論には紫外発散は現れない．点粒子の場合にはループは太さゼロの閉曲線で，長さに意味がありループ全体が限りなく小さな時空領域に収まる寄与が紫外発散を生み出す．このように，[V：弦の非局所性は重力を予言すると同時にその紫外発散の困難も自動的に解消するメカニズムを備えている]．定性的には，時空中で時間と空間の典型的スケール ΔT，空間的スケール ΔX の間に，一種の不確定性関係（時空不確定性関係）が成り立つ．

$$\Delta T \Delta X \gtrsim l_s^2. \tag{11}$$

ただし，l_s は弦理論が自然単位で唯一持つ定数としての「基本的長さ」である．

弦の非局所性により，局所可換性 (3) は成り立たない．しかし，粒子が十分長い時間間隔で伝播する（$\Delta T \to \infty$）ときには，$\Delta X \to 0$ が可能で，あたかも広がりがない粒子状態とみなせる（再び図 7 参照）．そのため，通常は局所可換性に起源が求められる散乱振幅（S 行列）の運動量空間での解析的性質，および摂動論における確率保存則が弦理論で保たれ，[VI：非局所性があっても共形不変な力学を反映して，長距離スケールにおける因果性が成り立つ]．

e) 開いた弦と D ブレーン：ここまで閉弦だけを扱ってきたが，弦理論では端点を持つ開弦も可能だ．端点では境界条件を指定する必要があるが，それは D ブレーンと呼ばれる新しい物理的自由度が存在することに対応する．D ブレーンの運動と相互作用は，共形不変性を満たす開弦の力学に支配され，その時空的振舞いは (11) と調和する．端点での典型的な境界条件は，ノイマン条件 $\frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = 0$ とディリクレ条件 $\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} = 0$ で，前者を満たす成分が，D ブレーンが広がっている方向，後者を満たす成分は D ブレーンが運動する方向に対応する．従って，ノイマン方向が p 成分あるなら，D ブレーンは空間 p 次元（Dp ブレーン）に広がっている．開弦では右進行波と左進行波が重ね合わさった定在波が運動モードになり，第 1 励起状態は一番波長の長い定在波が 1 個励起したもので，$D-2$ 個の独立自由度（1 枚の D ブレーンの場合）がある．閉弦と同様にローレンツ対称性との両立のため，その質量はゼロだ．

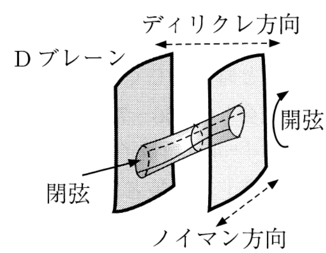


図 10

この結果，Dp ブレーンの量子力学は，低エネルギーでは $p+1$ 次元時空の非可換ゲージ理論で近似できる．ノイマン方向の自由度がゲージ場（$(p+1)$-ベクトル），ディリクレ方向の D ブレーン運動がヒッグス場（$D-p-1$ 個のスカラー）に対応する．D ブレーン自身の質量は $1/g$ に比例する．D ブレーンの量子統計性がゲージ群の連続的対称性で表され，群の次元は D ブレーン数で決まる．図 10 に例示した開弦と閉弦の関係を反映し，重力場理論とゲージ場理論の間で双対関係が成り立ち（ゲージ/重力対応），重力がゲージ理論によって記述できる（およびその逆の）場合がある．

これらすべては共形不変性に支配された非局所性の帰結だ．それを反映する (11) は，形式的には過去の「時空量子化」の試みを思い起こさせるが，本来は，よりダイナミカルな含意がある．弦理論における時空の非局所性の意味はくみ尽くされていないし，さらに追求すべき問題が数学的にも概念的にも多々あることを強調して結びとする*2)．

（よねや・たみあき，放送大学教養学部）

*2) 本解説のうち，弦理論の標準的な教科書では説明されていない点や関連する試みについては，文献も含めて T. Yoneya, *Prog. Theor. Phys.* **103**, 1081 (2000), *Nucl. Phys.* *B***576**, 219 (2000), *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **171**, 87 (2007)，弦理論の重力理論としての認識の歴史については，*The Birth of String Theory* (Cambridge Univ., 2012) に所収の筆者の回想 “Gravity from strings” を参照.

特集／場と力の物理イメージ

湯川秀樹のマルの理論と素領域概念

“非可換量子化時空” 出現の兆しと素領域概念のゆくえ

田中　正

はじめに

筆者は湯川秀樹博士（1907–81, 以下湯川と呼称）の素領域の研究に直接関わることはなかったが，素領域の出発と時を同じくする湯川主導の「素粒子の時空記述研究会」（1966～78）の活動に微力を注いだ．本稿副題の「“非可換量子化時空” 出現の兆しと素領域概念のゆくえ」は，筆者にとって主題と深く関わる課題であり，むすびで簡単にふれる．

1.「中間子論」,「マルの理論」と Dirac

1933 年の春，仙台の数物学会における「核内電子の問題に対する一考察」から，湯川の中間子論への第一歩が踏みだされ，翌年の秋には中間子論が発表される．まさに中間子論の考察の真っ最中と思われる 1934 年春の数物学会では,「マルの理論」の出発点と言うべき「相対性量子力学における確率振幅」が発表されている．実際，後者の発表に湯川を促したのは，前年の P.A.M. Dirac “The Lagrangian in Quantum Mechanics”[1] であった．このことは湯川が中間子論の成果を踏まえ，局所場理論の発散の根源に本格的に立ち向かう 1942 年の “場の理論の基礎について”[2] から窺える．図 1 (a), (b), (c) はそれからの引用であるが，上述の湯川の「相対性量子力学における確率振幅」や「マルの理論」を彷彿とさせるものであり[3]，それに先立つ Dirac 論文のエッセンスでもある．実際 Dirac は論文の冒頭，系の総体的，相対論的記述を与える Lagrange 形式とそれに基づく自らの量子論における “変換理論”（1926）の重要性を強調する．その上で図 1 (a), (b) に見られる，特定の時刻 t における原因 (A) の下に特定の時刻 t' に結果 (B) が実現される「非相対論的」確率振幅を超えて，図 (c) の境界 (C) に劃された「原因と結果の非分離」の相対論的な 4 次元領域，まさに後日湯川が描く「マル」の領域[3] に注目している．さらに変換理論の考えを場の理論に一般化して，この 4 次元領域にわたる変換関数 “generalized transformation function” (g.t.f) を導入，その絶対値の 2 乗は曲面 (C) 上の「原因と結果の非分離」の一連の観測に関わる “The relative a priori probability” を与えると考える．湯川はこれを “先天的確率” と呼び，難解な Dirac の考えを高く評価している．しかし湯川もこの時点（1942 年）では，“原因結果の非分離性は素粒子の構造が関係するような問題において，真に本質的な意味を持つに至るであろう” としつつ，局所場理論の根底にある “時間・空間の連続性の問題は最もむつかしい，そして恐らく一番最後の問題であろうと思います” となお慎重である．

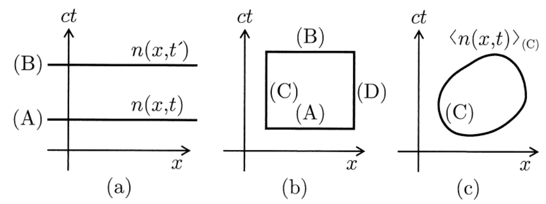


図 1

2. 素領域理論と時空

湯川が時空そのものに立ち入るのは，非局所場の理論（1947～）を経て，1966 年発表の “Atomistics and the Divisibility of Space and Time”[4] である．その

成果は湯川の「素粒子と時空」(〜1978)[5] に詳しい．そこではそれ以上分割不可能な4次元領域，前述の「マル」の極限的領域として，いわゆる“素領域 D”（Elementary Domain）と素領域 D 上の場 $\Psi(D)$ が導入され，任意の有限な Minkowski 空間は独立な素領域群，“a complete set of $\{D_1, D_2, \cdots, D_N\}$”[4] によって埋めつくされると考える．ここで湯川は電光掲示板のイメージのもとに，隣接する一連の素領域に，特定の励起状態が“4次元的事象”の連鎖として伝播するとき，それは対応する特定の素粒子の4次元空間中の飛跡を示すと考える．しかしこのような素領域概念と，その励起状態の伝播を可能にする素領域間の相互作用をいかに定式化するかは最大の難問であり，未完に終わっている．湯川の「素粒子と時空」[5] はつぎの印象的なことばで結ばれている：“このような方向に進んでゆくと，結局は何らかの意味における時空自身の量子化という問題に突きあたらざるを得ないかも知れない．素領域という概念自体も，背後に4次元連続体としての Minkowski 空間を想定している点で，まだ不徹底であるのかも知れない．しかし，その解明はすべて今後に残されている．”

むすび—“非可換量子化時空”出現の兆しと素領域概念のゆくえ—

湯川の予見に応えるかのように，1990年代半ばになって，重力をも含む超弦理論の先端に“非可換量子化時空”の兆しが見えてきた．N 個の D 粒子多体系の量子力学，いわゆる M 理論の中に，D 粒子の“非可換位置座標”が出現した[6]．湯川の「第二量子化」の考え[2] からすれば，それは D 粒子多体系の背後に“非可換量子化時空”そのものの存在を強く示唆する．

筆者が注目するのは，1947年の H.S. Snyder と直後にそれの改変を試みた C.N. Yang の“非可換量子化時空”[7] であり，ことに長短2つの長さのスケールを備えた Yang の簡潔な時空代数とその表現である[8]．すなわち任意の座標系で，d-次元，半径 L の体積 V_d^L の記述に関わる空間成分演算子の既約表現を考察の対象とし，その次数を $N_{\rm dof}(V_d^L)$ とするとき，それは体積 V_d^L 中の独立自由度を与え，対応する Hilbert 空間は $|m\rangle's$ $(m = 1, 2, \cdots, N_{\rm dof}(V_d^L))$ によって張られる．m は通常の Minkowski 空間での位置座標に対応し，基底ベクトルのセット $\{|m\rangle's\}$ は，前項2で述べた湯川の“a complete set of $\{D's\}$”の役割を演じていることに気付く．因みに時空の量子化と非可換性は相対論の要請から不可分である．

他方 $N_{\rm dof}(V_d^L)$，つまり体積 V_d^L 中の独立自由度は Weyl の次数公式で与えられるが，“非可換”時空の故に低減し，実際 Yang 時空の場合それは体積 V_d^L ではなく，その表面積 $A(V_d^L)$ に比例し，今日世界的に注目されている Holographic Principle の仮説の導入なしに，長年懸案のブラック・ホールの Area-Entropy Law[9] の統計的解釈を可能にする[8]．

また非可換量子化時空のアイデアは，1930年代後半の W.K. Heisenberg の示唆に発するとされ，時空座標間の不確定性関係によって，湯川が生涯をかけた発散の困難の解決が期待される．

来るべき時空概念の新たな変革にむけて，若い学生，研究者のみなさんの奮起を期待している．

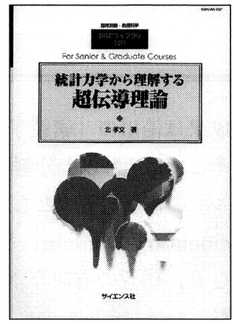
本稿の準備に協力頂いた青山秀明氏に感謝する．

参考文献

1) P.A.M. Dirac, “The Lagrangian in Quantum Mechanics”, *Phys. ZS. Sowj.* **3** (1933), 64.
2) 湯川秀樹「場の理論の基礎について」(「科学」1942年7〜9月号連載,『湯川秀樹著作集 8 学術篇 I』(岩波書店，1989) 所収，233–274).
3) 坂田昌一「中間子理論研究の回顧」(『物理学と方法論集 1』(岩波書店，1972) 所収，108–154).
4) H. Yukawa, “Atomistics and the Divisibility of Space and Time”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* Nos.**37** and **38** (1966), 512.
5) 湯川秀樹「素粒子と時空」(『湯川秀樹著作集 9 学術篇 II』(岩波書店，1989) 所収，261–285).
6) E. Witten, “Bound States of Strings and p-Branes”, *Nucl. Phys. B***460** (1995), 335; T. Banks, W. Fischler, S.H. Shenker and L. Susskind, “M Theory As A Matrix Model: A Conjecture”, *Phys. Rev. D***55** (1997), 5112.
7) H.S. Snyder, “Quantized space-time”, *Phys. Rev.* **71** (1947), 38; C.N. Yang, “On quantized space-time”, *Phys. Rev.* **72** (1947), 874.
8) S. Tanaka, “Where does black- hole entropy Lie?” —Some remarks on area-entropy law, holographic principle and noncommutative space-time, *Eur. Phys. J. Plus* **129** (2014), 11, hep-th (gr-qc)/1304.6581.
9) 「数理科学」2011年10月号特集「時空と熱力学—ブラックホール熱力学の多彩な広がり」.

（たなか・しょう，京都大学名誉教授）

統計力学から理解する 超伝導理論



北孝文著，B5 判，200 頁，本体 2457 円，サイエンス社

超伝導に関する本は，数多（あまた）あるのであるが，この本はとてもユニークな一冊である．この本には物質名が一回も出てこない（本当は 2 カ所出てくる）．ふつう超伝導の教科書というと，まずマイスナー効果や磁束の量子化などの現象が解説されて，さらに超伝導転移温度の上昇の歴史が語られ，1986 年の銅酸化物高温超伝導のブレークスルーが驚かれて…，と進むのであるが，この本はそのようなことには一顧だにせず，純理論的に，統計力学から出発して一直線に超伝導理論の深みに向けて突き進んでいくのである．

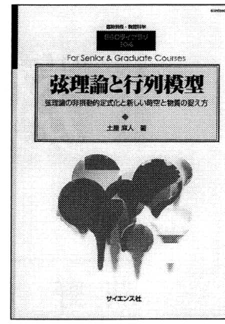
一応，通常の解説をつけておくと，超伝導理論は今から 60 年ほど前の 1957 年に BCS 理論が出てかなり完成した．ただし BCS 理論は基礎中の基礎であって，その後も超伝導研究は変貌を遂げつつ連綿と続いている．例を挙げるだけでも，量子位相の相関から生じるジョセフソン効果，単純な s 波超伝導から発展した異方的超伝導（ヘリウム 3 の p 波超流動もその一例），超伝導体に貫通した磁束が格子を組んだときのダイナミクスや統計力学．物質としても，1986 年に発見された銅酸化物の高温超伝導（d 波超伝導）は有名であるが，その先駆けとして重い電子系や有機導体での超伝導があった．さらに高温超伝導以後も，p 波と考えられる Sr_2RuO_4, Co 系超伝導，鉄を含んだ鉄系超伝導物質群，完璧に調べつくされたと思われていた 2 元素系での MgB_2 の超伝導の発見など，いくらでも新しい超伝導物質が見つかっている（ここに挙げたものは日本で発見されている）．さらにそれぞれの物質において，新しい物理が考えられてきたのである．超伝導を引き起こすメカニズムとしても，最も古い電子格子相互作用から，スピンのゆらぎ，電荷ゆらぎ，軌道ゆらぎといったあらゆる可能性が考えられてきた．ともすれば絶縁体化してしまう強相関の電子系において，いかにして高温超伝導が実現するかについては，未だに熱い論争が続けられている．最近でも，トポロジカル超伝導体や，超伝導体中の素励起としてのマヨラナ粒子の予言や検証など，最先端の挑戦が続いている．

実は，著者の北孝文氏と評者は，東京大学物性研究所が六本木にあった時に隣どうしの研究室の助手だったのである．私が斯波研究室で北さんは高田研究室で，「同じ六本木の釜の飯を食った」仲である．当時も現在も，北さんの研究スタイルは純理論的問題の核心へ一直線に降下していくものである．本書では北さんの本領が発揮されている．

本書の特徴は，統計力学の初歩から丁寧に超伝導理論まで進む点である．そのため初学者にも便利になっている．とくに最初の部分に多粒子系の波動関数や第二量子化について詳しく書かれている．超伝導への導入としてハートリー–フォック近似やランダウのフェルミ液体論も紹介しているのはユニークな点である．超伝導理論の解説部分では，「なぜ粒子数を保存しないような平均場を仮定するのか？」という疑問に答えるように工夫されている．このため最初に粒子数を保存する多体波動関数を示し，それからグランドカノニカル分布への変換として BCS 状態を導入している．さらに，波数空間での BCS 状態を後回しとして，まずはクーパー対の実感がわく「実空間」での波動関数を示し，それに関連したボゴリュボフ–ドジェンヌ方程式から超伝導理論に入るのである．このあたりが本書の特徴の一つである．慣れないと多少面食らうかもしれないが，将来的に空間依存性のある磁束や境界条件を考える際には必須の方程式なので，ここで苦労しておくと後が大変楽になるともいえる．さらに通常の教科書では無視してしまうハートリー–フォックの寄与もボゴリュボフ–ドジェンヌ方程式において考慮している点も特徴である．前半のグランドカノニカル分布や多体の波動関数，ハートリー–フォック近似が，後半への伏線となっている．

以上のように，本書は通常の教科書や講義で一通り超伝導を理解している読者にとって，新鮮な切り口が盛りだくさんある．一方，初学者にとっても，慣れない物質群や複雑な電磁気学に惑わされることなく，統計力学や数学をベースに超伝導の奥義までたどり着くことができる一つのルートとなっている．

小形　正男（東京大学大学院理学系研究科）



弦理論と行列模型

弦理論の非摂動的定式化と新しい時空と物質の捉え方

土屋麻人著，B5 判，168 頁，本体 2238 円，サイエンス社

本書は弦理論の非摂動的定式化としての行列模型，場の理論のラージ N 還元という 2 つの話題について，時空の創発・出現という観点からまとめられた解説書である．これらは 1980 年代序盤および終盤から長期にわたり研究されている分野であるため内容も豊富であるが，本書ではうまくコンパクトにまとめられている．

第 1 章「弦理論の非摂動効果」では，弦理論の非摂動効果について場の理論の場合との比較が簡単に述べられている．第 2 章「非臨界次元の弦理論と行列模型」でランダム面の描像により非臨界弦理論を与える 1 行列模型を導入し，それを直交多項式の方法を用いて厳密に解くことで非摂動効果を具体的に求めている．比較的最近（2000 年代）から研究が始まった ZZ ブレーン，FZZT ブレーンについても簡単に触れられている．

第 3 章「ラージ N 還元」では，行列場の理論や（格子）ゲージ理論において，行列のサイズ N が無限大のときに主要項であるプラナーダイアグラムに対して起こる次元還元（ラージ N 還元）の話題を解説している．著者らの研究結果である，群多様体上のラージ N 還元や 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論の非摂動的定式化についても取り上げられている．第 4 章「行列模型における T 双対」で，D ブレーンの有効作用の行列模型に関する T 双対や超対称ゲージ理論の格子定式化に利用されているオービフォルディングの話題が説明されている．

第 5 章「非可換幾何と行列模型」では，非可換平面や非可換球面を例として UV/IR mixing などの非可換空間上の場の理論の特徴に触れつつ，理論が行列模型から構成される事情が解説されている．後半の 5.3 節で 4 次元 $\mathcal{N}=4$ 超対称ヤン・ミルズ理論が新たな視点から再度議論され，5.4 節でツイスト還元模型が説明されている．

本書を通して強調されている時空の創発・出現の観点では，第 2 章の内容は行列変数が時空の座標に相当するのに対し，第 3 章および第 4 章は行列変数が運動量に対応している．そして，第 5 章では座標とも運動量ともみなせる中間の状況が現れている．

第 6 章「超弦理論と行列模型」で，10 次元タイプ IIB 超弦理論を非摂動的に記述する模型として著者らが提唱した IIB 行列模型の解説がなされている．世界面上の Green-Schwarz 作用との対応（6.2 節），D ブレーン間の相互作用（6.3 節），光円錐型弦の場の理論との対応（6.4 節）が議論された後，超弦理論の双対性（6.5 節）が簡単に触れられている．6.6 節では，行列変数を共変微分と解釈した場合に行列模型の運動方程式から曲がった時空の Einstein 方程式が導出される話題が紹介されている．6.7 節で標的空間の時空の符号がユークリッド型であるユークリッド模型のダイナミクスが議論された後に，符号がローレンツ型のローレンツ IIB 行列模型から $(3+1)$ 次元膨張宇宙が出現する最近の数値計算結果が最後の 6.8 節に述べられている．

本文で使われているいくつかの数式の細かな導出が付録 A「リューヴィル作用の導出」，付録 B「Van der Monde 行列式」，付録 C「Green-Schwarz 作用の超対称性と κ 対称性」，付録 D「南部・後藤弦と Schild 弦の対応」，付録 E「1 ループ有効作用の計算」，付録 F「ユークリッド型模型の有限性」で与えられている．

誤植は第 3 章，第 5 章でいくつか目につくものもあるが，読者自らが訂正しつつ読み進めることは可能であろう．豊富な内容が簡潔にまとめられているため致し方ないところだが，内容が凝縮されており読みづらい箇所（5.4 節）や超弦理論との詳細な対応に関する説明や明らかにすべき課題を加えて欲しいと感じる箇所（6.3 節，6.4 節）が見受けられた．気になった読者は巻末に挙げてある参考文献を参照されるとよいだろう．「まえがき」で著者は弦理論の知識がなくとも読み進められることを期待されているようだが，計算結果を理解する上で弦理論の T 双対や D ブレーンの有効作用などの入門的知識が必要との印象を受けた．

全体としてはかなりの内容が簡潔にまとまっているので，この分野の研究を志す初学者が目を通して全体像をつかむには良い書であり薦めたいと思う．

杉野 文彦（岡山光量子科学研究所）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

荻野 綱男

1984年12月号

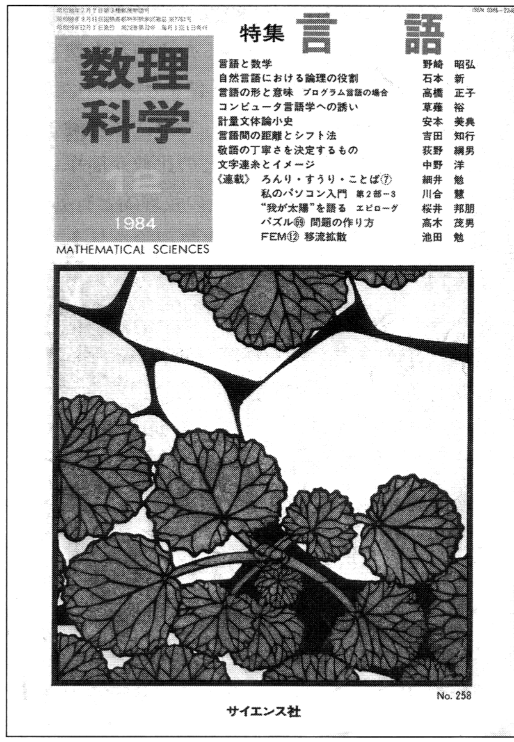
私は，数理科学 No.258（1984.12）に「敬語の丁寧さを決定するもの」という論文を書いた．内容は，「丁寧さの数量化」の手法で自由回答データを分析して，日本語の敬語表現のどういう部分が丁寧さに関わっているのかを明らかにしたというものであった．

それから30年が経った．今の時点で30年前の研究を眺め，現在とこれからの研究を展望してみたい．

第1に，私が30年前に示した「丁寧さの数量化」の手法であるが，この計算法は以前からすでに知られている計算法であった．その名を「交互平均法」(reciprocal averaging）という．交互平均法は，小林[1] の pp.137–144 に説明されている．同書によれば，この計算法はすでに1930年代に考案されているそうで，Hill[2] によって交互平均法と名付けられたようだ．交互平均法は，数理的研究では，対応分析（correspondence analysis）の名で呼ばれるとある．計算法自体は自分でオリジナルに考案したものであったが，数十年も前にすでに同じことを考えた人がいたわけだ．

第2に，このようにデータに徹底的にこだわって，そこから言えることを数量的に確認して，敬語に関する知見を得るタイプの研究は，その後新たな発展を見せていない．私は今でもこのような考え方をしており，その方法でこれからもデータを分析していくつもりであるが，同調者はほとんど出ていない．

なぜそのようなことになっているのか．敬語研究は言語研究の一分野であり，人文系の一部とみなされる．人文系の研究者は，数学（数理科学的な考え方）にうとい人が多く，数式が出てきただけで身構えてしまったり，自分とは無関係なものと考える傾向がある．このような感覚的な問題を解決することはむずかしい．私は，現在国文学科で日本語学を教えているが，学生たちに少しだけ数学的なものの見方をするように方向付けをしている．数学的な内容であっても，それをかみ砕いて，人文系の学生がわかるように話をしなければならない．そのような努力を継続することで，一般の人文系の人でも理解できるし，理解してみれば何もむずかしいことをいっているわけではないことが納得してもらえよう．このあたりは，もしかすると私の一生の宿題なのかもしれない．



参考文献

1) 小林四郎,『生物群集の多変量解析』, 蒼樹書房 (1995).
2) Hill, M.O., Reciprocal averaging: An eigenvector method of ordination, *The Journal of Ecology*, Vol.**61**, pp.237–249 (1973).

（おぎの・つなお，日本大学文理学部）

リレー連載
フィールズ賞で語る現代数学 第3回

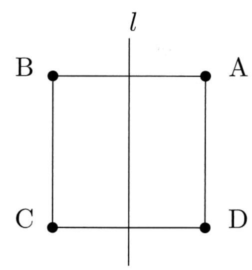
群と対称

宮本 雅彦

1. 単純群に向けて

群論関係では3名の方がフィールズ賞を受賞している．無限群を扱った1994年受賞のЕфим И. Зельманов を除いて，有限群論に絞れば，1970年に受賞した John G. Thompson と 1998年の Richard E. Borcherds の2名である．この間の30年はいろいろな意味で有限群が大きく発展した時期であった．Thompson が受賞した1970年と言えば廣中平祐先生が受賞した年でもある．群論でもフィールズ賞を受賞してはいないが，鈴木通夫先生を初め，多数の日本人研究者が活躍した．フィールズ賞で語る現代数学ということで原稿を書くことを依頼されたとき，テーマの「群と対称」を見て，あまりにも有限群論の歴史を暗示していることに驚いた．誰もが群を語るとき，対称を語り，対称を語るとき数学的には群を考える．しかし，Thompson は群の研究で，Borcherds は群の持つ対称性の研究でフィールズ賞を受賞した．そう，この30年は群と対称が切り離された時代だったのである．

簡単に対称性としての群のおさらいから始めよう．下図のような正方形ABCD を考えてみよう．このとき，時計回りの90度回転により，頂点は A→D, D→C, C→B, B→A と移動するが，頂点を区別しないと正方形の姿は変えていない．同様に，時計回りの180度回転も，対角の関係にある頂点を A↔C, D↔B と互いに交換し，正方形全体の配置を変えていない．このような物体の形や全体としての配置を変えない動かし方を**対称変換**と呼ぶ．



図形が長方形だと，180度回転は図形の姿を変えないが，90度回転のときには図形の配置が変わる．対称変換の言葉で長方形と正方形の区別がつくわけである．群論では，対称変換を個別に考えず，全体集合として扱う．すると大きなメリットが出てくる．例えば，90度回転させた後で，180度回転させると，270度回転となり，これも対称変換である．このように，一つの動きをした後に，別の動きを続けることで得られる動きを**合成**と呼ぶが，最初から対称変換全体を想定しておくと，2つの対称変換に対して，それらを合成したものもその中にある．数学でいう（2項）演算である．例え

ば，整数倍全体を考えておくと，3 倍と 7 倍から，合成（積）である $3 \times 7 = 21$ 倍ができることと同じである．このように，対称変換全体と合成（積）を考えると，数字と同じようなものができる．これが代数の出発点である．また，90 度回転を繰り返していくと，180 度回転，270 度回転，360 度回転が作れる．360 度回転は頂点を区別しても全く同じなので，動かさない 0 度回転と同じである．正方形の対称変換として，回転を説明したが，それ以外にも対称変換がある．例えば，図の縦軸 l を中心として，左右に反転させる動きを考えてみよう．頂点で考えると，A↔B, C↔D と交換される．あたかも軸 l に両面鏡があって，鏡に映った世界のようなので，**鏡映変換**と呼んでいる．これも対称変換である．すると，これと回転変換との合成もすべて対称変換であり，回転変換以外にも軸 l による鏡映，対角軸 AC による鏡映，対角軸 BD による鏡映，そして中心を通る水平軸による鏡映の 4 つの対称変換を作り出すことができる．

この変換全体の集合を抽象的に述べたのが群である．定義は簡単なので，述べておこう．

$a, b \in G$ に対して G のある元（ab と記す）を対応させる 2 項演算を持つ集合 G で，次の条件を満たすとき，G は**群**であると言う．

(1) 演算は結合律を満たす．すなわち，任意の $a, b, c \in G$ に対して $(ab)c = a(bc)$.

(2) 単位元 $e \in G$ がある．すなわち，すべての元 $a \in G$ に対して $ae = ea = a$ となる特別な元がある（唯一つであることはすぐに出てくる）.

(3) 各元 a に対して，$ab = ba = e$ を満たす a の逆元と呼ばれる元 b（a^{-1} で表す）がある．

何かの対称の集まりとして捉えるには少し勉強が必要だが，行列式がゼロではない n 次複素行列全体 $GL(n, \mathbb{C})$ は行列の積によって群となる．$GL(n, \mathbb{C})$ は，一般線形群と呼ばれている．整数の積とは違って行列の積では $ab \neq ba$ となるものがあるので，$ab = ba$ は特別な状態なのである．このような関係を（a と b は）**可換である**と言う．

群の記号として G を使うことが多い．群 (group) の最初の文字 G である．群の中の元の個数を**群の位数（order）**と呼び，$|G|$ で表す．例えば，正方形の対称変換全体は全部で 8 個の元からなっている．群の位数は抽象的な群にとって最も大切な情報である．原田群を見つけた原田耕一郎氏は，「群の位数は，素粒子の質量に似ていて，それを決定せずに，群を発見したとは言えない」と述べている．

言葉からも分かるように，群の部分集合が同じ演算で群となっているとき，**部分群**と呼ぶ．記号として，H が群 G の部分群であることを $H < G$（または $G > H$）と書いて示す．数字の大小関係と同じ記号を使うが，H, G が群であることに注意すれば混乱はない．例えば，正方形の対称変換全体の場合，鏡映変換を考えずに，回転変換だけを考えても，合成で閉じており群となっている．簡単な部分群の例として，単位元 e からだけなる部分集合や G の元全体も一応，部分群となっている．これら以外の部分群を真部分群と呼んでいる．

群の構造だけからいろいろな部分群が作れる．一つの元 a（とその逆元）から積を繰り返して作り出した元全体は，部分群となっている．例えば，90 度回転を繰り返すと回転変換全体の部分群が作れる．群の元 a に対して，何回その元を掛けると単位元になるかという回数は a の**位数**と呼ばれる．同じ位数という言葉を使うが，群か元かで区別できるし，ちょうど，a が作り出す部分群の位数でもある．また，G の元 g を固定して，それと可換な元全体 $C_G(g) = \{a \in G \mid ag = ga\}$ を考えても部分群となる．これを g の**中心化群**と呼んでいる．

また，もとの物体の構造によっていろいろな部分群も考えられる．例えば，正方形 ABCD の対称変換全体の群を考えた場合，頂点 A を固定するような対称変換全体も群となっており，部分群である．この部分群の元を見てみると，頂点の動かし方は，B と D を交換し C を固定するか，すべてを固定するかの 2 つしかない．すなわち位数 2 の部分群である．

群論における初期の素晴らしい結果として，Lagrange の定理と呼ばれるものがある．それは，群

の部分群の位数はもとの群の位数の約数となるというものである．すなわち，H が G の部分群なら，$|H|\,\big|\,|G|$ となるということである．

部分群の中で正規部分群と呼ばれる重要な意味を持つ部分群がある．G の部分群 H が**正規部分群**であるとは，G の任意の元 g に対して

$$gH = Hg$$

が成り立つものである．ここで，$gH = \{gh \mid h \in H\}$ というのは g と H の元をかけてできあがる元すべてからなる G の部分集合である．同様に $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ である．これらを G の（g を代表元とする）**剰余類**と呼ぶ．部分群 H が群の正規部分群であることを $G \rhd H$（または $H \lhd G$）と書いて表す．例えば，G のすべての元と可換な元全体は正規部分群となる．これを G の**中心**と呼んで，$Z(G)$ で表す．また，$GL(n,\mathbb{C})$ の行列式 1 の元全体も正規部分群である．これを $SL(n,\mathbb{C})$ で表し，特殊線形群と呼ぶ．

正規部分群は非常に強力な力を持っているので，少し証明を混ぜながら，その良さを説明しよう．2 つの剰余類 g_1H, g_2H を取ってくる．g_1H から 1 元 g_1h_1, g_2H から 1 元 g_2h_2 を適当に取ってくる．すなわち，$h_1, h_2 \in H$ を適当に取ってくるということである．すると，それらの積は $g_1h_1g_2h_2$ である．ここで，$Hg_2 = g_2H$ なので，ある $h_3 \in H$ があって $h_1g_2 = g_2h_3$ となる．それゆえ，積は $g_1h_1g_2h_2 = g_1g_2h_3h_2$ である．H は部分群でもあるので，$h_3h_2 \in H$ であり，結局，どのように h_1, h_2 を選んでも，$g_1h_1g_2h_2$ は剰余類 g_1g_2H に入っている．それゆえ，剰余類どうしの積も剰余類として一意的に決まるわけであり，2 項演算ができる．驚くことに，この積で剰余類全体が群となる．この群を**剰余群**と呼び，G/H で表す．

各剰余類に含まれる元の個数は $|H|$ なので，剰余類の個数は $|G|/|H|$ である．それゆえ，

$$|G| = |G/H| \times |H|$$

が成り立つ．すなわち，正規部分群 H があると，G は H と G/H という 2 つの群に分解できる．このように正規部分群を使って分解をしていくと，それ以上は小さく分解できない群の集まりが出てくる．このような群を**単純群**と呼ぶ．これがこの話の中心テーマである．

例えば，射影特殊線形群 $PSL(n,\mathbb{C}) = SL(n,\mathbb{C})/Z(SL(n,\mathbb{C}))$ は無限位数だが単純群である．

これまでの話から，位数が素数 p の群 G は常に単純であることが分かる．実際，正規部分群があれば，当然部分群でもあるので，Frobenius の定理より，その位数は 1 か p となってしまい，決して真部分群となることはない．

正方形を例として，正規部分群の列を考えてみよう．全体の群 G は位数 8 である．回転変換全体 R は位数 4 の正規部分群となっている．また，180 度回転と 0 度回転 e の 2 つの元からなる位数 2 の部分群 Z は R の正規部分群である．これで，$G \supseteq R \supseteq Z \supseteq \{e\}$ となり，剰余群 G/R, R/Z, $Z/\{e\}$ はすべて位数 2 の単純群である．

いろいろな物体に対する対称変換全体のなす群という概念は古くからあったが，抽象的に，群そのものの構造の重要性を示したのは Evariste Galois（1811–1832）である．この原稿の締切日 5 月 31 日に 20 歳という若さで決闘で亡くなっている．彼は，代数的方程式

$$X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n = 0$$

には，有限群（現在，Galois 群と呼ばれる）が定まり，その群が可解であることと，この代数的方程式が古典的な解法（既知の数字の冪根と四則演算だけを使う）で解を求められることが必要十分条件であることを示した．すなわち，与えられた代数方程式に関係なく，それによって決まる群（Galois 群）の構造だけで，代数的方程式の重要な性質が決まるのである．しかも，例えば，$n=2$ である代数的方程式は無限個あるが，これに対応する群は 2 つしかない．$n=3$ の場合にも，群は 4 つしかない．ここで，群が**可解**であるというのは，単純群の列に分解して行ったときに，上の正方形の対称群のように，素数位数の単純群だけが出てくる群のことを言う．このような群を可解と呼ぶのは，上の Galois の結果からである．

素数位数の単純群以外に，有限位数の単純群は

あるのだろうか．実際，Galois は位数 60 の 5 次交代群 A_5 が単純群であることを示し，5 次方程式に対して冪根と四則演算だけの一般解法が存在しないことを示した．重要な単純群が現れたので説明しておこう．n を自然数とする．単純に n 個の数字（頂点のつもり）$1,\cdots,n$ が並んでいて，それらの順番を変える操作を考える．この操作のことを**置換**と呼んでいる．置換の合成も置換である．すると，この置換全体 S_n は群となっている．これは**対称群**と呼ばれる．位数を計算してみよう．すなわち，順番の変え方の個数を求めるのである．まず，1 の行き先は n 通りある．1 の行き先を一つ固定すると，2 の行き先は 1 の行き先以外の $n-1$ 通りある．同様に，1, 2 の行き先を決めると，3 の行き先は，1, 2 の行き先以外の $n-2$ 通りある．これらの個数は 1, 2 の行き先に関係していない．これを繰り返していくと，結局は置換の個数は $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ 通りある．それゆえ，$|S_n| = n!$ である．置換の中で一番簡単な操作は，2 つ数字だけを交換し，それ以外は動かさないものであり，**互換**と呼ばれている．例えば，3 と 4 を交換し，それ以外は動かさないものである．すべての置換は，互換を繰り返して作り出すことができ，偶数個の互換の積として表示できるものと奇数個の互換の積として表示できるものに完全に 2 分される．偶数個の互換の積で表示できるものは位数 $n!/2$ の部分群となり，**交代群** A_n と書かれる．この交代群は $n \geq 5$ の場合に単純となるのである．

また，先に複素行列の単純群を紹介したが，これを真似て有限群を作る方法もある．複素数の代わりに，有限個 q の元からなる**有限体** $\mathbb{F}_q$ を使うのである．有限体 $\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間を考え，その中にある種の内積を考えたものを考える．このとき，それらを不変にするような $\mathbb{F}_q$ の元を成分とする行列式 1 の行列全体は群となるが，多くの場合，それの中心を使って剰余群を作ると，複素数のときと同じように，単純群となる．例えば，Galois は $PSL(2,p) = SL(2,\mathbb{F}_q)/Z(SL(2,\mathbb{F}_q))$ が単純群であることを証明している．また，1870 年に現在古典群と呼ばれるものを Jordan–Hölder の定理で有名な Camille Jordan が発見している．その後，無限リー群の理論を有限体上に制限することで例外群と呼ばれる系列を Leonard E. Dickson が構成した．これらの群は**リー型の群**と呼ばれる．

150 年以上前までは，これで有限単純群はすべてだと思われていた．ところが，1861 年に Emile L. Mathieu が特殊な構造を持つものの対称変換群として，5 つの単純群の存在を発表した．これが**散在型単純群**の最初である．William Burnside は，有限群の分野がこれから大きくなることを予感し，群論研究者への教科書となる本を書いたのも Mathieu 群の存在が確信された直後の 1897 年である．その中で，Burnside は知られている単純群はすべて位数が偶数であることを指摘した．

2. Thompson の時代

1950 年代から，数学の一つの領域である有限群論で特異な動きがあった．それまでの行列表示や対称変換の集まりであった群の研究とは異なり，抽象的な群そのものの構造から強い結果を出すという動きである．例えば，1955 年に Claude Chevalley はそれまでのリー型の群を生成系と関係式だけで記述することに成功した．そして，Thompson の登場である．彼は，まず 1959 年，博士論文において

(1) 固定点なしの素数位数の自己同型を持つ有限群がベキ零群であることを示した（Frobenius 予想の解決）．

この結果は，素数 p に対して，位数が p 冪である p-群を正規部分群として持つような部分群どうしの関係を研究するという局所群構造解析の強力さを見せつけるに十分であり，Zassenhaus–Feit–鈴木–伊藤による Zassenhaus 群の分類完成など，多くの優秀な数学者を群論に導いた．その中の一人である鈴木通夫は，完全に分類されていたと思われていた無限系列のリー型有限単純群 $Sz(q)$ を発見し，リー群研究者を驚かせた．さらに，Thompson は指標理論の研究者であった Walter Feit と一緒に，

(2) 奇数位数の単純群が可解群であることを証明した（Burnsideの問題）.

続けて一人で

(3) 極小単純群（すべての真部分群が可解）の分類を完成させている.

指標理論というのは,群Gを複素行列群$GL_n(\mathbb{C})$に埋め込むことを考える分野であり，各$g \in G$に，埋め込んだ先の行列のトレース（対角成分の和）を対応させた関数（指標と呼ばれる）の性質を研究する．これは，有限群論にとって非常に強力な手法である.

五味健作氏の別冊数理科学「群とその応用」（サイエンス社，1991年10月）所収の記事[1)]に，原田耕一郎氏から聞いた話として，次の逸話がある.

飛行場でBrauerとFeitがばったり出会ったとき，Feitが奇数位数の単純群を研究していると聞いていたBrauerは，Feitにこう言ったという.「奇数位数の単純群より偶数位数の単純群のほうが手掛りが多く有望だから，そっちをやってみないか？」奇数位数の単純群の可換性を証明せよという問題は，Burnsideが今世紀初頭に提出して以来難問として有名なもので，それが今解けようとは誰も思っていなかったので，愛弟子を案じての忠告だったと思われる．Feitの答えはこうだったという.「いえ先生，奇数位数の単純群の方が簡単です．実際，私はついこの間，奇数位数の単純群は可換群であることの証明を完成したところです.」

「奇数位数の群は可解」という事実は学部生にでもわかる結果だが，その証明は255ページという長さである．証明は基本的に数学的帰納法である．明らかに位数1の群は可解なので，位数$2n-1$以下まで正しいとして，位数$2n+1$の群を考察する．すると真の部分群は帰納法の仮定により可解である．この設定で部分群どうしの関係を調べるのである．この証明法から，問題(3)に向けて考察が進むのは自然かもしれない．だが，(3)の証明はさらに長く，436ページである．私も群論の勉強を始めたとき，(2)の論文（Odd paperと呼ばれる）を読もうとして，途中で挫折した記憶がある．それぞれの論文には，最初に数十の補題が並んでいて，その補題一つ一つを論文として投稿しても採用されるほど素晴らしい結果と証明で，読んでいて興奮したものである．しかし，それ以降は，指標理論を少し使った後，純粋に群論の局所構造だけの繊細な組合せ論的論法だけが延々と続くため，個人で読むのは大変である．(3)では指標理論も消え，局所構造の解析だけで400ページ以上であった.

これらの論文が出版された後，結果の大きさから当然であるが，ここでの証明法が以後の群論研究の中心的手法となっていく．Thompsonの結果は，有限単純群分類が現実として可能であることを意味した．というのは，奇数位数の群が可解であるということは，非可解単純群は位数2の元を含むということである．Thompsonの業績の少し前に，Brauer–Fowlerが，ある関数fがあって，単純群Gの位数2の元gに対して，不等式$|G| < f(|C_G(g)|)$が成り立つことを示していたのである．この定理の意味するところは，gの中心化群$C_G(g)$が決まれば，単純群Gの可能性はそれほど多くないことになり，分類が可能となるわけである．それからの20年近くは，この種の研究が群論の中心となった．ある意味で参加しやすい研究である．既存の単純群Gを一つ固定し，位数2の元gの$C_G(g)$を考え，それと同じ中心化群を持つ単純群を決定するという問題である．才能があれば，分類は完成し論文となるし，運と嗅覚を兼ね備えていれば新しい単純群を見つけることができるという美味しい研究テーマである．実際，Zvonimir Jankoはこの方法でリー型に属さない4つの単純群を発見している．最初のJanko群J_1の発見は1965年でMathieu群の発見から100年以上たっていた．他にもグラフの拡張を使った単純群の拡大，位数2の元の共役類の性質による単純群の発見など，様々な方法によって単純群が次から次へと発見されていった．1974年には10^{54}近くになる位数を持つ膨大な単純群（モンスター

単純群）の存在可能性が Bernd Fischer によって報告され，1975 年にはモンスター単純群の中に出てくる原田群が構成され，最後の単純群となる 26 個目の J_4 が Janko によって発見された．

当時，群論研究のリーダーだった Daniel Gorenstein は単純群分類を完成させる夢のような計画 Gorenstein program を立てた．多分，何十年もかけて完成させる予定のものであったのだろう．ところが，Michael G. Aschbacher という超天才が現れ，信じられないことに，$C_G(g)$ のかなりの一般的な設定に対して単純群の構造を決定し，Gorenstein program の基本的問題を次々と解決していったのである．私が大学 4 年生のとき，Aschbacher の論文の勉強会に参加させてもらったが，当時助手だった吉田知行さんが Aschbacher の論文の 1 行（…なので，…である）を私たちに分かるように 1 時間近くかけて説明してくれていたことを思い出す．この辺りから，群の分類研究は異常なスピードで進み出し，結論に向けて走り出していった．多分，どんな研究でも同じだと思うが，一般論を扱うときには，美しい定理が生きてくるが，最終段階の詰めにおいては，膨大な計算が中心となり，美しさが二の次となることがある．有限群論においても，群の持っている対称性という性質を忘れ，幾何，解析などの他分野との関連もすべて忘れて，最終結論に向けて走っていったのである．1981 年に単純群の分類が完成したとの報告がなされるが，いくつかの論文はまだ確認を終えておらず，特に quasi-thin と呼ばれるケースの確認は未完成であった．ここの部分はのちに Aschbacher と Stephen D. Smith が 2004 年に完成させ，これで名実ともに有限単純群の分類が終了した．しかし，分類定理を証明する論文の総量は，1 万ページにも及び，新しい研究者がこの証明を読み通せるかが疑問視されている．

3. 対称性への回帰

アメリカの単純群分類の流れとは一線を画して，イギリスのケンブリッジ大学で別の研究が進んでいた．3 つの Conway 群 C_0, C_1, C_2 を発見した John H. Conway が仲間たちとアトラス計画という名の下で，散在型有限単純群，特にモンスター単純群の性質をいろいろ調べていた．まだ存在は証明されていたわけではないが，モンスター単純群を行列に埋め込もうとすると最低 196883 次の行列が必要となることは分かっていた．この事実を聞いていたカナダの計算数学者 John McKay は整数論の保型形式という分野の文献を見ていて非常に特別な j-関数 $j(\tau)$ のフーリエ展開

$$q^{-1} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + \cdots$$

の中に，196884 という数字を見つけて驚いた．ここで $q = e^{2\pi i\tau}$ である．何かあると感じた McKay はこれを Thompson に伝えると，Thompson は次の係数 21493760 もモンスター単純群を埋め込む行列のサイズと関係があることに気付き，Conway に調べるように伝えたのである．Conway は行列のサイズだけでなく，モンスター単純群のいくつかの元に対しても行列に埋め込んだときのトレース（対角成分の和）を計算し，それを係数として同様の式を作ると，ケンブリッジ大学の数学図書館に向かい，整数論の文献を捜して，これが特別なタイプの保型形式の前半と一致していることを確認した．Conway は後半では，群の一つの元の指標が決まる度に，式を作成し，わくわくしながら図書館に向かったと述べている．その現象が起こる理由は分からないが，モンスター単純群のすべての元に対して，特別なタイプの保型関数（Thompson 級数）が決まることを確認した後，1976 年 Simon P. Norton と一緒にモンスター単純群にまつわる神秘的な結果をまとめて，Monstrous Moonshine という論文を発表した．特に，McKay の観測に対しては，モンスター単純群が作用している特別な意味を持つ次数付きのベクトル空間 $V = V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots$ が存在して，その空間でのモンスター単純群の元の指標を係数とする形式的級数は特別な保型関数となるだろうと予想した．これが Moonshine 予想と呼ばれるものの基本形である．

1982 年，Robert L. Griess, Jr. がモンスター単純群の表現の性質から定義される 196883 次元

の非結合 Norton 代数を実際に構成し，その自己同型群としてモンスター単純群を実際に構成した．その構成に触発された Igor Frenkel, James Lepowsky, Arne Meurman の3人は，1984年に数理物理で使われていた頂点作用素とツイスト加群の理論を使って次数付きベクトル空間を構成し，Moonshine 予想の解を与えるだろうと期待した．Conway の学生であった Borcherds は，その構成自体がモンスター単純群の作用に対して自然であることを見抜き，次数付きベクトル空間ではなく，無限個の演算を持つ代数として扱うことを提案した．これが頂点代数の出発点である．Frenkel, Lepowsky, Meurman はこの頂点代数を実際に構成し，より有限性を強めた性質を添加して Moonshine 頂点作用素代数と名付けた．これはそれまでの有限群のイメージを大きく変えた．それまでは，有限群を扱うとき，有限個の物体の置換の集まりを考えていた．有限体上の有限次元ベクトル空間も有限個の元しか含まれていない．ところが，モンスター単純群が自然に作用する世界は違っていた．現在のところ，モンスター単純群を自然にある物体の自己同型群として捉える方法は，この無限個の積を持つ無限次元の空間だけなのである．私には，モンスター単純群が有限の世界だけが有限群の世界ではないと笑っているように思える．無限の次数付き空間 $V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots$ というのは，V_n での値 c_n を係数とする級数 $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n q^n$ ($q = e^{2\pi i\tau}$) を考えることで，関数の世界，連続の世界へとつながるのである．Borcherds の仕事は，モンスター単純群の言葉を我々群論研究者に伝えた．

4. まとめ

Thompson の結果は，学部生でもすぐに結果がわかる話であり，Borcherds の結果は，群論研究者でも非常に理解し辛いものである．Thompson は現代の群論を創り出したと言って過言ではないだろう．我々群論研究者からみると神様のようなものである．一方，Borcherds の仕事は，多くの数学者が関わる大きな分野を創り出したわけではない．例えば，Borcherds が創り出した頂点代数という分野は，今では，数理物理における共形場理論を代数的に捉えたものだとして説明されることが多い．その意味で，新しい分野ではないと言うことも可能である．しかし，Borcherds の結果の本当価値は，数学のどの分野にも内在している美しさが共通であるということを示し，そしてこの共通の美しさを持ったものは，その姿とは関係なく，数学的に重要だということを示したことである．多くの数学が，美しくなるように数学的対象を構築するのとは対照的に，Borcherds は一見すると（頂点代数などは，何度見ても）美しく見えないものの中に，数学的な真の美しさがあることを見出し，その理由を探して，最終的に神秘的な数学関係式を見出してきたのである．例えば，Borcherds が導入した Borcherds 代数は，Kac–Moody 代数の信じられないような拡張であり，Kac–Moody 代数の一番重要な部分を残し，その他の条件を一気に取り払ったものである．一見して数学的に美しいものではないが，それを利用して，j-関数の美しい表示の関係式

$$p^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{n \in \mathbb{Z}} (1 - p^m q^n)^{c(mn)} = j(\sigma) - j(\tau)$$

を見つけ，長い歴史を持つ保型形式の研究者たちを驚かせた．ここで，$p = e^{2\pi i\sigma}$, $q = e^{2\pi i\tau}$ であり，

$$\sum_{n=-1}^{\infty} c(n) q^n = q^{-1} + 196884q + \ldots$$

は j-関数 $j(\tau) - 744$ である．

Thompson のフィールズ賞の授賞式で，Richard D. Brauer は「有限群の研究に数学の知識は必要ないようである」という言葉を送ったが，Borcherds は数学の多くの分野と関係した頂点代数を作り出し，モンスター単純群の真の意味を語ったのである．

参考文献

1) 五味健作著，「有限単純群の分類」，別冊数理科学「群とその応用」，pp.56–62，サイエンス社，1991年10月．
2) マーク・ロナン著（宮本雅彦・宮本恭子訳），『シンメトリーとモンスター—数学の美を求めて』，岩波書店．

（みやもと・まさひこ，筑波大学数理物質系）

経路積分と量子解析

いかにして量子現象を数理的に扱うか

第5回

量子古典対応(1)

非可換系を可換系で表現する

鈴木 増雄

5.1 はじめに

今までは，古典的な運動の法則が与えられたとき，それを量子的な法則として捉える手段として経路積分が非常に有効であることを解説してきた[1)]．今回から，その逆の定式化について説明する．すなわち，もともと量子力学の枠組みで導入され定義される物理系（例えばディラックの相対論的電子論で導入されたスピンとその多体系）を古典表示で扱う．その中心的概念は量子古典対応[2~8)]である．

この対応関係を利用することにより，量子系の計算機シミュレーションが可能となり，量子モンテカルロ法が開発された[2,5,7,9)]．その基本的なアイデアと実際の応用例[9,10)]を解説する．

また，量子古典対応関係を導く基礎になる数学公式であるトロッター公式[11~13)]およびその拡張，特に筆者が開発した高次の指数積分解公式を詳しく説明する[14,15)]．

5.2 量子と古典のかけはし

一般に，量子力学的な系は，非可換な演算子からなるハミルトニアン $\mathscr{H}$ で記述される．その系の状態 $|\Psi(t)\rangle$ の時間発展は，$\mathscr{H}$ の指数演算子を用いて

$$|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{\frac{t}{i\hbar}\mathscr{H}}|\Psi(0)\rangle \tag{5.1}$$

と表される．これを具体的に求めるには，$\mathscr{H}$ を記述するヒルベルト空間の任意の正規直交基底 $\{|\alpha\rangle\}$，$|\alpha'\rangle$ の間の行列要素（すなわち，遷移行列要素）

$$\langle\alpha|\exp(x\mathscr{H})|\alpha'\rangle \equiv T_{\alpha\alpha'}(x) \tag{5.2}$$

を計算すればよい．ハミルトニアン $\mathscr{H}$ が解析的に対角化できる場合は例外的であり，通常は対角化が困難である．そこで，$\mathscr{H}$ を対角化しないで式 (5.2) を求める一般的な処法をこれから説明する．それが量子古典対応の考え方である．まず，指数関数の特徴を利用して

$$\begin{aligned} &T_{\alpha\alpha'}(x) = \langle\alpha| \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}\mathscr{H}}\right)^n |\alpha'\rangle \\ &= \sum_{\alpha_1}\sum_{\alpha_2}\cdots\sum_{\alpha_{n-1}} T_{\alpha\alpha_1}\left(\frac{x}{n}\right) T_{\alpha_1\alpha_2}\left(\frac{x}{n}\right)\cdots T_{\alpha_{n-1}\alpha'}\left(\frac{x}{n}\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

と変形する．ここで，$\frac{x}{n}\mathscr{H}$ の大きさ（ノルム）が充分小さくなるくらい，n を大きくとれば，式 (5.3) の各部分の行列要素 $T_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{x}{n}\right)$ を精度良く求めることは後で述べるように可能である[2~15]．近似的な行列要素 $\tilde{T}_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{x}{n}\right)$ を構成する際に留意すべき重要なことは次の事項である．

- 元の系の相互作用が短距離力の場合には，近似的に構成した $\tilde{T}$ を幾何学的に表現した（格子上の）相互作用もまた短距離力になること（必ずしも自明でない）．
- 元の系のハミルトニアン $\mathscr{H}$ の対称性を保持すること．例えば，スピン系の場合の内部対称性（O(3) 対称性など）を保つ近似を作ること．
- 近似の精度を上げ，なおかつ収束性・安定性を良くすること．

このように，$T_{\alpha_j\alpha_{j+1}}\left(\frac{x}{n}\right)$ に対する何らかの近似公式を用いて行列要素 $T_{\alpha\alpha'}(x)$ をパラメータの組（$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$）で表すと，これは量子的な物理量を古典的な変数で記述することになる．この量子と古典のかけはしを具体的に実行する一般的な方法を次に説明する．

5.3 トロッター公式と ST 変換

前節に述べた3つの留意すべき条件をみたすように量子系の物理量を古典変数を用いて記述するために，次のいわゆるトロッター公式[11]

$$\mathrm{e}^{x(A+B)} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}A}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}B}\right)^n, \tag{5.4}$$

または，拡張されたトロッター公式[13]

$$\mathrm{e}^{x(A_1+A_2+\cdots+A_r)} = \lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}A_1}\mathrm{e}^{\frac{x}{n}A_2}\cdots\mathrm{e}^{\frac{x}{n}A_r}\right)^n \tag{5.5}$$

を利用する[3]．ここで，$A_1, A_2, \cdots, A_r$ は互いには非可換であっても，それぞれ個別には簡単に対角化可能であり，それらの指数関数 $\left\{\exp\left(\frac{x}{n}A_j\right)\right\}$ の行列要素も容易に求まるものとする．後で具体例でも示す通り，互いに非可換な演算子 $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \cdots, \mathscr{H}_r$ の和からなるハミルトニアン

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_1 + \mathscr{H}_2 + \cdots + \mathscr{H}_r \tag{5.6}$$

に対して，この分け方をうまく工夫し，式 (5.3) の $T\left(\frac{x}{n}\right)$ にトロッター公式を

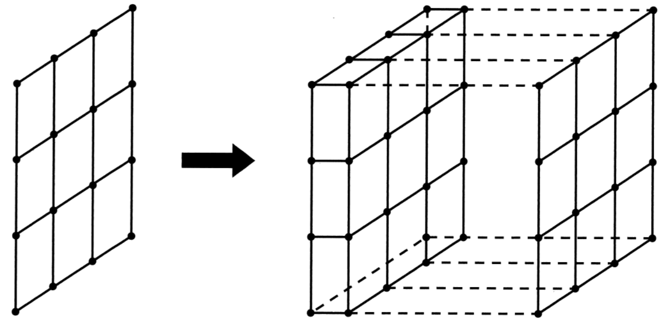


図 5.1　$d = 2$ としたときの量子系とそれに対応する古典系．(a) 2 次元量子系，(b) 3 次元古典系．

適用して得られる表式を物理的視点から幾何学的に解釈すると[3]，図 5.1 のように，d 次元量子系が $(d+1)$ 次元古典系に変換されることになる[2]．この変換（等価性）は，しばしば ST 変換（鈴木–トロッター変換）と呼ばれ，多くの問題に応用されている[4~10]．

5.4 最初の適用例—量子スピン系

(i) 等価性研究の歴史的背景

筆者が大学院生時代に単独で書いた最初の頃の論文は，異なる 2 つの物理系（の問題）の間の数理的関係の研究に関するものであった．一つは，磁場のないスピン系の解から磁場のあるスピン系の解を求める公式に関するものである[16]．もう一つは，同一の物理系における異なる物理量の間の一般的な相関等式を見つけた論文である[17]．これは 2 頁足らずの短い論文であるが，部分的な自由度の消去など，今風に言えば「くり込み的な処法」に近い方法も使用されており，無数の相関等式が導入され，実に多くの研究に利用されている[18]．この流れの研究はその後もいつまでも続いている．

異なる 2 つのモデルの間の等価性にもいろいろと興味深いものが多い．例えば，図 5.2 に示すような 4 つのベクトルを状態変数に持つ系は，次の対応によって，2 つの独立なイジングスピン系 (S_i, S'_i) と等価になる[19]：

$$\boldsymbol{e}_1 \leftrightarrow (1,1), \quad \boldsymbol{e}_2 \leftrightarrow (1,-1), \quad \boldsymbol{e}_3 \leftrightarrow (-1,1), \quad \boldsymbol{e}_4 \leftrightarrow (-1,-1). \tag{5.7}$$

すなわち，ベクトルポッツモデルの相互作用 $\mathscr{H}_{ij} = -J(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ は，

$$-J(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = -\frac{J}{2}(S_i \cdot S_j + S'_i \cdot S'_j) \tag{5.8}$$

の関係式により，それは，2 つの独立なイジングモデルで表される．しかも，相互作用は元の系の相互作用の半分である．

このように異なる物理系の間の等価性が示されると，一方の系の性質から，それと等価なもう一つの系の物理的性質がわかることになり，大変便利である．

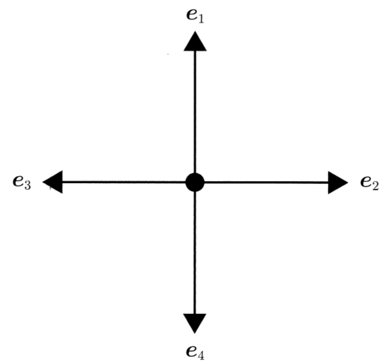


図 5.2　ベクトルポッツモデルの 4 状態 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ および $\boldsymbol{e}_4$.

しかし，多くの場合に，興味深い系は解析的に解くのが困難である．解けない問題を解けない問題に変換して何の役に立つのかという批判もあった．ところで，今から半世紀前はちょうど電子計算機が開発され始めた頃であった．筆者は子供の頃からエレクトロニクスに興味があり，コンピューターの応用には強く心をひかれ，物理系のシミュレーションに興味を持っていたので，d 次元量子系と $(d+1)$ 次元古典系との等価性は，量子系を計算機でシミュレートするのに使えると思いついた[3~5]．こうして，量子モンテカルロ法の一般的定式化へと進んだ[3,5]，

(ii) 1 粒子量子系（0 次元）と 1 次元古典系との等価性

考え方の基本を説明するために，もっとも簡単な 1 粒子の問題を例として扱うことにする．しかも離散的表現に適したスピンを例に取り上げる．スピン $\frac{1}{2}$ に対応してパウリ行列 σ^x, σ^y, σ^z を扱うことにする．これらは，σ^z を対角化した表示を用いると，次の 2 行 2 列の行列で表される：

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

また，これらは次の交換関係などをみたす：

$$\begin{aligned} &[\sigma^x, \sigma^y] = \sigma^x\sigma^y - \sigma^y\sigma^x = 2\mathrm{i}\sigma^z, \\ &\sigma^x\sigma^y = -\sigma^y\sigma^x, \quad \sigma^y\sigma^z = -\sigma^z\sigma^y, \quad \sigma^z\sigma^x = -\sigma^x\sigma^z \\ &(\sigma^x)^2 = (\sigma^y)^2 = (\sigma^z)^2 = E \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

ただし，単位行列 E は物理では単に数字の 1 で表されることが多い．

これらのパウリ行列 $\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z$ を用いて，1 粒子のハミルトニアン $\mathscr{H}_1$ が次のように与えられるものとする：

$$\mathscr{H}_1 = -\mu_{\mathrm{B}} H\sigma^z - \Gamma\sigma^x. \tag{5.11}$$

ただし，$\mathscr{H}$ は磁場を表し，Γ はスピン反転の効果を与える．これは 2 行 2 列のエルミート行列であるから，容易に対角化でき，その固有値は $\pm\{(\mu_{\mathrm{B}}H)^2 + \Gamma^2\}^{1/2}$

となる．したがって，(5.11) の状態和 $Z_1(\beta)$ は

$$Z_1(\beta) = \mathrm{Tr}\ \mathrm{e}^{-\beta\mathscr{H}_1} = 2\cosh\left(\beta\sqrt{(\mu_\mathrm{B}H)^2+\Gamma^2}\right) \tag{5.12}$$

と与えられる．これをわざわざ一度量子系を古典系に変換する方法を用いて議論すると，$h_n = \frac{1}{n}\beta\mu_\mathrm{B}H$, $\gamma_n = \frac{1}{n}\beta\Gamma$ を用いて

$$\begin{aligned} Z_1(\beta) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\ \left(\mathrm{e}^{h_n\sigma^z}\mathrm{e}^{\gamma_n\sigma^x}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{\sigma_1=\pm1}\sum_{\sigma_2=\pm1}\cdots\sum_{\sigma_n=\pm1}\langle\sigma_1|\mathrm{e}^{h_n\sigma^z}|\sigma_1\rangle\langle\sigma_1|\mathrm{e}^{\gamma_n\sigma^x}|\sigma_2\rangle \\ &\quad\times\langle\sigma_2|\mathrm{e}^{h_n\sigma^z}|\sigma_2\rangle\langle\sigma_2|\mathrm{e}^{\gamma_n\sigma^x}|\sigma_3\rangle\cdots\langle\sigma_n|\mathrm{e}^{h_n\sigma^z}|\sigma_n\rangle\langle\sigma_n|\mathrm{e}^{\gamma_n\sigma^x}|\sigma_1\rangle \end{aligned} \tag{5.13}$$

と書ける．ただし，$|\sigma_j\rangle$ は σ^z の（固有値が σ_j の）固有状態を表す：

$$\sigma^z|\sigma_j\rangle = \sigma_j|\sigma_j\rangle. \tag{5.14}$$

この表示では，$\exp(h_n\sigma^z)$ は対角成分のみを持つことを用いて，式 (5.13) の中間状態の数を $2n$ から n に半減させた．ここで，式 (5.13) の 2 種類の行列要素は容易に求まり，次のようになる：

$$\langle\sigma_j|\mathrm{e}^{h_n\sigma^z}|\sigma_j\rangle = \mathrm{e}^{h_n\sigma^j},\quad \langle\sigma_j|\mathrm{e}^{\gamma_n\sigma^x}|\sigma_{j+1}\rangle = \left(\frac{\sinh(2\gamma_n)}{2}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{K_n\sigma_j\sigma_{j+1}}. \tag{5.15}$$

$$\text{ただし，}K_n = \frac{1}{2}\log\coth\gamma_n. \tag{5.16}$$

こうして，1 粒子の状態和 $Z_1(\beta)$ は，次のように 1 次元イジングモデルの状態和に変換される：

$$Z_1(\beta) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sinh 2\gamma_n}{2}\right)^{n/2}\mathrm{Tr}\ \exp\left(h_n\sum_{j=1}^n\sigma_j + K_n\sum_j\sigma_j\sigma_{j+1}\right). \tag{5.17}$$

この量子古典変換によると，式 (5.11) の非対角要素（量子効果）は量子軸（ST 軸）方向の相互作用（式 (5.17) の指数の肩の第 2 項）で表される[20]．このように，量子ゆらぎが古典的相互作用に変換されることは興味深いことである．次に示すように，一般の高次元量子系でも同様な変換が可能である．

(iii) d 次元量子系と $(d+1)$ 次元古典系の等価性[3~10]

一般の d 次元で書き表すと表記が繁雑になるので，一般性を失うことなく，1 次元横磁場イジングモデル

$$\mathscr{H} = -J\sum_{j=1}^N\sigma_j^z\sigma_{j+1}^z - \Gamma\sum_{j=1}^N\sigma_j^x = \mathscr{H}_0 + \mathscr{H}' \tag{5.18}$$

を用いて，量子古典対応を説明する．1 粒子の場合と比較して，対角成分の相

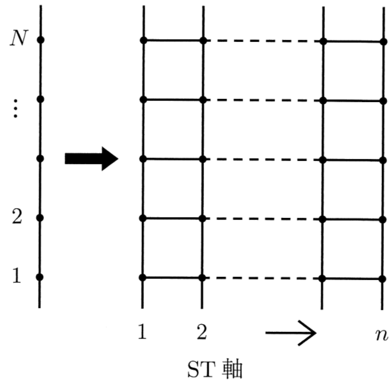


図 5.3　1 次元量子系に等価な 2 次元イジングモデル．

互作用の項がそのまま加わるだけの違いで，数学的取扱いは，0 次元の場合と同じである．すなわち，1 次元横磁場イジングモデルの状態和 Z_{TI} は

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{TI}} &= \mathrm{Tr}\ \mathrm{e}^{-\beta\mathscr{H}} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Tr}\left(\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{n}\mathscr{H}_0}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{n}\mathscr{H}'}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\sinh\left(\frac{2}{n}\beta\Gamma\right)\right)^{Nn/2} \mathrm{Tr}\ \exp\left(-\beta\mathscr{H}^{(n)}_{\mathrm{Ising}}\right) \qquad (5.19)
\end{aligned}
$$

と 2 次元イジングモデルの状態和に変換される[3]．ただし，$\mathscr{H}^{(n)}_{\mathrm{Ising}}$ は，図 5.3 に示されるような有効相互作用を持つ 2 次元イジングモデルである：

$$
-\beta\mathscr{H}^{(n)}_{\mathrm{Ising}} = \frac{\beta J}{n}\sum_{i,j}\sigma_{i,j}\sigma_{i+1,j} + \frac{1}{2}\log\ \coth\left(\frac{\beta}{n}\Gamma\right)\sum_{i,j}\sigma_{i,j}\sigma_{i,j+1}. \qquad (5.20)
$$

この等価な 2 次元ハミルトニアンをみると，ST 軸方向の有効相互作用は，Γ が大きくなるほど小さくなることがわかる．これは量子効果が強くなるとスピン反転が激しくなり，量子的な "乱れ"（量子ゆらぎ）が強くなって ST 軸方向には相関が弱くなることを示している．逆に，Γ が小さくなると ST 軸方向の相互作用 K_n は $-\frac{1}{2}\log\gamma_n$ に比例して大きくなる．同時に式 (5.19) の最初の因子が零に近づく．したがって，$n\to\infty$ $(\gamma_n\to 0)$ の極限のとり方には工夫が必要になる[21,22]．

また，上の ST 変換を利用すると 2 次元のオンサーガーの厳密解[23]を用いて 1 次元量子スピン系の解が求まることになる[2,3]．もちろん，この 1 次元量子スピン系のモデルは直接対角化して厳密に解くことができる[24]．両方のモデルの解法を比較すると，解法の数理的構造が極めて類似していることに気づいた人は多いであろう．これは，2 次元イジングスピン系の転送行列と 1 次元横磁場イジングモデルのハミルトニアンが，両方の相互作用の間の適当な関係式のもとに両者が可換になり，同時対角化可能となるという興味深い事実からも頷ける[2]．さらに，上に述べた直接的な変換理論からもその妥当性が理解できる．

いずれにしても，異なる 2 つのモデルの等価性は物理系を横断的に扱うのに

大変便利である．

5.5 量子モンテカルロ法の数理

以上の等価性の理論より，量子系に対しても古典系で開発された研究手法が適用できることになることがわかる[3~10]．特に，計算機シミュレーションの典型的な方法としてのモンテカルロ法が量子系で一般的に適用できることになり急激に量子系の計算機実験による研究が発展した[3~10]．

量子系が古典系に等価になるといっても，最初から古典系を記述するために導入されたモデルとは本質的に異なるところもあることに注意しなければならない[3~10]．そうでなければ，量子系と古典系の質の違いが計算機実験では見出せないことになってしまう．古典表示で変換された系の特徴を列挙すると次の通りである：

- もとの量子系の相互作用の対称性が古典系でも形を変え保持されている．例えば，ハイゼンベルグモデルの相互作用

$$-J(\boldsymbol{S}_i \cdot \boldsymbol{S}_j) = -J\left(S_i^x S_j^x + S_i^y S_j^y + S_i^z S_j^z\right) \tag{5.21}$$

  はスピン空間で回転対称性（すなわち O(3) 対称性）を持っている．したがって，これを古典表示すると，その対称性を反映した特殊な 4 体力相互作用となる[3]．
- 全スピン保存の系では，それに対応して古典系のスピン変化を上向き（または下向き）のスピンだけに着目して調べることができる（これは「世界線の方法」と呼ばれる）[9, 10]．

5.6 おわりに

今回は，量子系を古典系で表示する一般的な方法論を説明し，量子スピン系で具体的にその本質を解説した．この量子古典対応の重要な活用方法として，量子モンテカルロ法の数理を解説した．その解析的な応用例や近似計算の精度を上げる高次分解公式などに関しては次回以降に解説する．

参考文献

1) 鈴木増雄，本連載第 1～4 回，「数理科学」2014 年 6 月号，8 月号，9 月および，11 月号（サイエンス社）．
2) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **46**, 1337 (1971).
3) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 1454 (1976), および鈴木増雄：『統計力学』（現代物理学叢書）（岩波書店，2000）．
4) 大貫義郎，鈴木増雄，柏太郎：『経路積分の方法』（現代物理学叢書）（岩波書店，2012 年 6 月再版）の第 6 章「代数的一般化」参照．
5) M. Suzuki, ed: *Quantum Monte Carlo Methods in Equilibrium and Nonequilibrium Systems*, Springer-Verlag (1987).
6) B.K. Chakrabarti, A. Dutta and P. Sen: *Quantum Ising Phases and Transitions in Transverse Ising Model*, Springer (1996).

7) 鈴木増雄：『活力を与える「物理」』（オーム社，2007），第 6 章「拡張・変換の視点で限界・困難を乗り越える」参照.

8) M. Suzuki, *Quantum-Classical Statistical Physics Correspondence*: 5$^{\text{th}}$ Ramanujan Lecture 2010 (25$^{\text{th}}$ November, 2010, Kolkata, India).

9) M. Suzuki, S. Miyashita and A. Kuroda, *Prog. Theor. Phys.* **58**, 1377 (1977).

10) H. De Raedt and A. Lagendijk, *Phys. Rep.* **127**, 233 (1985); H. De Raedt and K. Michielsen, *Ann. Phys.* **4**, 679 (1995).

11) H.F. Trotter, *Proc. Am. Math. Phys.* **10**, 545 (1959).

12) M. Suzuki, *J. Phys. Soc. Jpn.* **21**, 2274 (1966).

13) M. Suzuki, *Commun. Math. Phys.* **57**, 193 (1977).

14) M. Suzuki, *Phys. Lett. A* **146**, 319 (1990); ibid. **165**, 387 (1992); *J. Math. Phys.* **32**, 400 (1991); *Physica A* **191**, 501 (1992); ibid. **194**, 432 (1993); ibid. **205**, 65 (1994).

15) E. Hairer, C. Lubich and G. Wanner, *Geometric Numerical Integration*, Springer (2006), およびその引用文献参照.

16) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **18**, 233 (1965).

17) M. Suzuki, *Phys. Lett.* **19**, 267 (1965).

18) M. Suzuki, *Int. J. Mod. Phys. B* **16**, 1749 (2002), およびその引用文献参照.

19) M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **37**, 770 (1967).

20) 鈴木増雄，『変分原理と物理学』（丸善出版，近刊）；「パリティ」2012 年 4 月号より 2013 年 5 月号までの連載記事.

21) M. Suzuki and M. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 787 (1987).

22) M. Inoue and M. Suzuki, *Prog. Theor. Phys.* **79**, 645 (1988).

23) L. Onsager, *Phys. Rev.* **65**, 117 (1944).

24) S. Katsura, *Phys. Rev.* **127**, 1508 (1962).

（すずき・ますお，東京大学名誉教授）

特　集（2015 年 1 月号予告）

科学における〈時間〉

ありふれた存在を多角的に捉える

時間	佐藤　文隆
時間の社会インフラ	細川　瑞彦
素粒子実験での時間測定の果たす役割	中平　武
秩序と無秩序を繋ぐ時間	伏見　譲
暗号における時間の有限性・非可逆性	林　正人
時空特異点とトポロジー	原田　知広 椎野　克
弦理論と時間	土屋　麻人
［コラム］	松下　泰雄
［コラム］	筒井　泉

特　集（2014 年 11 月号）

応用するトポロジー

“柔らかい幾何学”がもたらす諸分野の発展

巻頭言　トポロジーを応用する研究の流れ	出口　哲生
トポロジーと数学のいろいろな分野との関連	河内　明夫
空間グラフのトポロジー	新國　亮
DNA トポロジー　DNA に働く酵素の数学的研究	下川　航也
結び目のエネルギー	今井　淳
流体力学とトポロジー	木村　芳文
トポロジーとゲージ理論　ヒッグス場のトポロジー	伊藤　克司
高分子とトポロジー	手塚　育志
［コラム］ Witten とトポロジカル場の理論の登場　理論物理学から生み出される新たな数学	藤　博之

《連載》	例題形式で探求する微積分学の基本定理	その 12	森田　茂之
	微分方程式を考える	その 4	小澤　徹
	経路積分と量子解析	その 4	鈴木　増雄

編集後記

10 月に幕張で開催された CEATEC JAPAN（家電・IT の国際見本市）に行ってきました．普段は理論の話に関わることがほとんどですが，技術開発の現場ではどんな様子なのか，その一部だけでもわかり，大変有意義でした．もちろん技術とは言っても根底には本特集で取り上げた物理のテーマも使われており，理論の重要性も改めて認識させられます．

さて，本誌は一足先に年末を迎えました．今年も様々な科学の出来事がありました．来年も興味深いことがあることを楽しみにしています．　(R)

＊　　＊

本特集で取り上げた，「局所性と非局所性」というテーマは物理学の根幹をなす概念なのだなと感じました．

ニュートン力学をはじめ，電磁気学，相対論や量子論など様々な角度から解説をしていただきましたが，どの分野もこの概念が根底にあり展開されているように思います．また，局所性・非局所性の概念によっていろいろな分野が関連付けされているようにも思いました．米谷先生が巻頭言で書かれている「縦糸と横糸」とはこういうことなんだなと納得しました．　(T)

数　理　科　学　12月号

2014 年 12 月 1 日発行

数理科学編集部　　発行人 木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　ⓒ　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500（代表）
〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁